

## chap3 : Les caractéristiques de tendance centrale



# Les indicateurs numériques

- Il s'agit de résumer à travers quelques **indicateurs** numériques ou **paramètres** caractéristiques la distribution d'une variable statistique.
- On les appelle des indicateurs de synthèse d'une distribution statistique.
- On distingue :
  - les indicateurs de **tendance centrale**
  - Les indicateurs de **dispersion**
  - les indicateurs de **forme**
  - Les indicateurs de **concentration**



Salaire Moy  
5000 DH

Salaire le plus  
fréquent 5000 DH

50% inf à 5000  
DH et 50% sup  
à 5000DH



## chap3 : Les caractéristiques de la tendance centrale (Paramètres de position)

- Les caractéristiques ou indicateurs de tendance centrale sont :
  - ✓ la **moyenne** ( $\bar{x}$ )
  - ✓ le **mode** ( $Mo$ )
  - ✓ la **médiane** ( $Me$ )



## chap3 : Les caractéristiques de la tendance centrale (Paramètres de position)

$\bar{x}$

### La moyenne : La moyenne arithmétique ( $\bar{x}$ )

- En mathématiques, la moyenne est un outil de calcul permettant de résumer une liste de valeurs numériques en un seul nombre réel, indépendamment de l'ordre dans lequel la liste est donnée.
- Par défaut, il s'agit de la moyenne arithmétique, qui se calcule comme la somme des termes de la liste, divisée par le nombre de termes



## chap3 : Les caractéristiques de la tendance centrale (Paramètres de position)

$\bar{x}$

**La moyenne :** La moyenne arithmétique ( $\bar{x}$ )

**Données brutes:** La moyenne arithmétique simple

Soit  $\{x_1; x_2; \dots; x_N\}$  un échantillon de données numériques d'effectif total N, alors:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Exemple :

Soit l'échantillon  $x = 1; 1; 2; 2; 2; 2; 3; 3$

$$\bar{x} = \frac{1}{8}(1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3) = 2.$$



## chap3 : Les caractéristiques de la tendance centrale (Paramètres de position)

$\bar{x}$

**La moyenne :** La moyenne arithmétique ( $\bar{x}$ )

**Données discrètes groupées:** La moyenne arithmétique pondérée.

- Si le caractère  $x = \{x_1; x_2; \dots; x_k\}$  est groupé dans un tableau de données contenant les effectifs ou les fréquences de chaque valeur du caractère alors :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k f_i x_i$$



## chap3 : Les caractéristiques de tendance centrale (Paramètres de position)

### La moyenne : La moyenne arithmétique ( $\bar{x}$ )

Données discrètes groupées: La moyenne arithmétique pondérée.

Exemple :

On donne la distribution suivante, concernant les notes de 33 étudiants de PCSI –CPGE Tanger dans la matière « Informatique ».

$$\bar{x} = \frac{1}{33} \sum_{i=1}^{20} n_i x_i$$

| Note $x_i$ | Nombre des étudiants $n_i$ | Fréquence $f_i$ |
|------------|----------------------------|-----------------|
| 1          | 0                          | 0,00            |
| 2          | 0                          | 0,00            |
| 3          | 1                          | 0,03            |
| 4          | 6                          | 0,18            |
| 5          | 4                          | 0,12            |
| 6          | 2                          | 0,06            |
| 7          | 3                          | 0,09            |
| 8          | 5                          | 0,15            |
| 9          | 0                          | 0,00            |
| 10         | 1                          | 0,03            |
| 11         | 2                          | 0,06            |
| 12         | 0                          | 0,00            |
| 13         | 0                          | 0,00            |
| 14         | 2                          | 0,06            |
| 15         | 1                          | 0,03            |
| 16         | 2                          | 0,06            |
| 17         | 1                          | 0,03            |
| 18         | 1                          | 0,03            |
| 19         | 2                          | 0,06            |
| 20         | 0                          | 0,00            |
|            | 33                         | 1,00            |

$$\bar{x} = 9,1$$

## chap3 : Les caractéristiques de la tendance centrale (Paramètres de position)

$\bar{x}$

### La moyenne : La moyenne arithmétique ( $\bar{x}$ )

#### Variable continue :Données groupées en classes

- Lorsque les données sont groupées par classes, on fait l'hypothèse que chaque observation à l'intérieur d'une classe a une valeur égale au centre de la classe.
- Ce qui constitue bien sûr une approximation.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i C_i$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k f_i C_i$$



## La moyenne : La moyenne arithmétique ( $\bar{x}$ )

### Variable continue :Données groupées en classes

Exemple :

| Classe Notes | Nombre des étudiants $n_i$ | $C_i$ | $n_i \times C_i$ |
|--------------|----------------------------|-------|------------------|
| [0;5[        | 7                          | 2,5   | 17,5             |
| [5;10[       | 14                         | 7,5   | 105              |
| [10;15[      | 5                          | 12,5  | 62,5             |
| [15;20]      | 7                          | 17,5  | 122,5            |
| Total        | 33                         |       |                  |

$$\bar{x} = \frac{1}{33} \sum_{i=1}^4 n_i C_i$$

$$\bar{x} = 9,32$$



## La moyenne : Avantages / Inconvénients

### Avantages

- ✓ Simple à calculer
- ✓ Linéarité :  $\overline{ax} = a \times \bar{x}$
- ✓ Additivité:  $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$
- ✓ La somme des écarts à la moyenne est plus faible que la somme des écarts à la médiane ou au mode

$$\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}) = 0$$

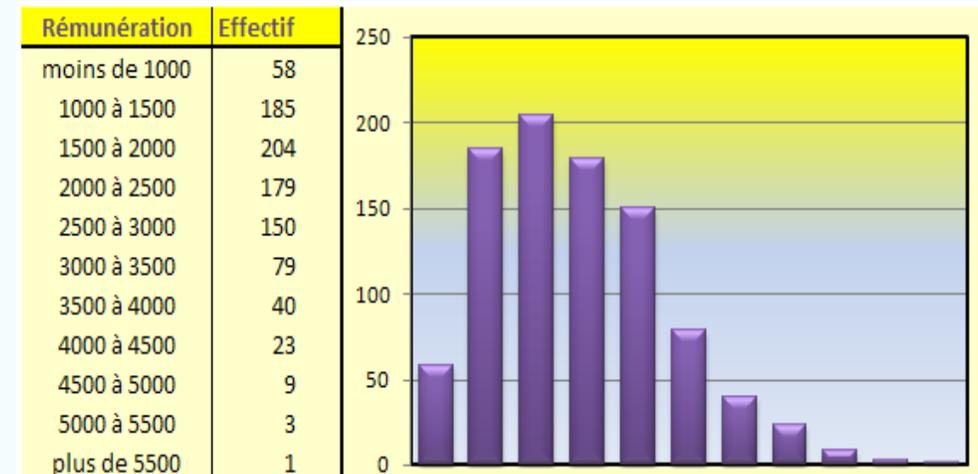
| $X_i$ | $n_i$ |
|-------|-------|
| 1     | 2     |
| 2     | 4     |
| 3     | 2     |

$$\bar{x}=2$$

$$2*(1-2)+4*(2-2)+2*(3-2)=0$$

### Inconvénients

- ✗ Sensibilité aux valeurs extrêmes
- ✗ Si la distribution est dissymétrique, la moyenne représente mal la valeur centrale



### La moyenne : Avantages / Inconvénients

- **Exemple1:** Soient les salaires mensuels en DH des employés d'une entreprise industrielle Y dans une ville: 4000, 3700, 4100 , 4500, 5000, 3800

$$\bar{x} = 4183.33$$

- **Exemple2:** Soient les salaires mensuels en DH des employés d'une entreprise industrielle Y dans une ville: 4000, 3700, 4100 , 4500, 5000, **13000**, 3800

$$\bar{x} = 5442,86$$

- On se rend compte que la moyenne des 7 salaires mensuels est égale à 5442,86 DH alors qu'un seul salaire dépasse cette moyenne.
- On en déduit que la moyenne est sensible **aux valeurs extrêmes**.



## chap3 : Les caractéristiques de tendance centrale (Paramètres de position)

### La moyenne : Généralisation de la notion de moyenne

Travail à faire:

- ✓ Moyenne géométrique
- ✓ Moyenne harmonique
- ✓ Moyenne quadratique
- ✓ Comparaison des moyennes



# Applications

## Application 1:

- *Le tableau suivant donne la répartition du nombre d'agriculteurs par superficie cultivée (en ha).*

| Superficie en ha (xi) | Nombre d'agriculteurs (ni) |
|-----------------------|----------------------------|
| 10                    | 5                          |
| 17                    | 1                          |
| 20                    | 21                         |
| 27                    | 5                          |
| 32                    | 1                          |
| 38                    | 3                          |

1. *Calculer l'effectif total*
2. *Calculer la moyenne arithmétique de cette série.*
3. *Interpréter le résultat.*

## chap3 : Les caractéristiques de la tendance centrale (Paramètres de position)

Mo

### Le mode: ( $M_o$ )

- La question qui conduit à définir le mode d'une distribution statistique est de savoir sur quelles valeurs du caractère se concentrent le plus d'individus. On recherche donc les modalités les plus fréquentes.
- Le **mode** est la valeur qui a le plus grand effectif partiel (ou la plus grande fréquence partielle) et il est dénoté par  $M_o$ .

### Données brutes:

Soit la série {0, 2, 3, 5, 2, 4, 4, 6, 6, 6, 2, 2}

Le mode est **2** car cette valeur est la plus fréquente dans la série ( $n_i=4$ )



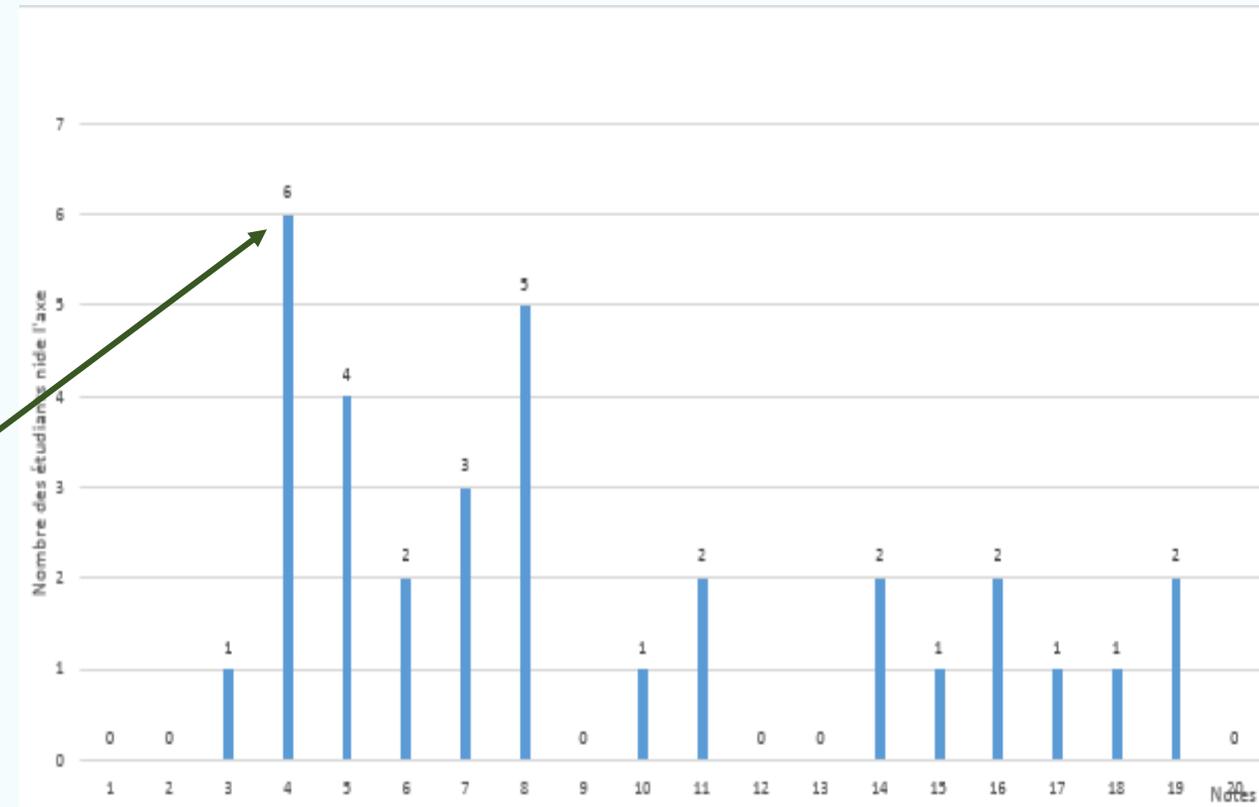
# chap3 : Les caractéristiques de la tendance centrale (Paramètres de position)

Mo

**Le mode:** ( $M_o$ )

Données discrètes groupées.

| Note $x_i$ | Nombre des étudiants $n_i$ | Fréquence $f_i$ |
|------------|----------------------------|-----------------|
| 1          | 0                          | 0,00            |
| 2          | 0                          | 0,00            |
| 3          | 1                          | 0,03            |
| 4          | 6                          | 0,18            |
| 5          | 4                          | 0,12            |
| 6          | 2                          | 0,06            |
| 7          | 3                          | 0,09            |
| 8          | 5                          | 0,15            |
| 9          | 0                          | 0,00            |
| 10         | 1                          | 0,03            |
| 11         | 2                          | 0,06            |
| 12         | 0                          | 0,00            |
| 13         | 0                          | 0,00            |
| 14         | 2                          | 0,06            |
| 15         | 1                          | 0,03            |
| 16         | 2                          | 0,06            |
| 17         | 1                          | 0,03            |
| 18         | 1                          | 0,03            |
| 19         | 2                          | 0,06            |
| 20         | 0                          | 0,00            |
|            | 33                         | 1,00            |



Le mode est **4** car cette valeur est la plus fréquente dans la série ( $n_i=6$ )

## chap3 : Les caractéristiques de la tendance centrale (Paramètres de position)

Mo

### Le mode: ( $M_o$ )

#### Variable continue :Données groupées en classes

- Dans le cas d'une variable **quantitative continue**, la **classe modale** est la classe qui présente l'effectif le plus **élevé**.

| Classe Notes | Nombre des étudiants $n_i$ |
|--------------|----------------------------|
| [0;5[        | 7                          |
| [5;10[       | 14                         |
| [10;15[      | 5                          |
| [15;20]      | 7                          |
| Total        | 33                         |

La classe modale est **[5; 10[**

### Le mode: ( $M_o$ )

- On peut déterminer le mode par un calcul :

$$M_o = L_i + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} a_i$$

- $L_i$  : la borne inférieure de la classe modale.
- $a_i$  : l'amplitude de la classe modale.
- $n_0$  et  $f_0$  sont l'effectif et la fréquence associés à la classe modale.
- $n_1$  et  $f_1$  sont l'effectif et la fréquence de la classe qui précède la classe modale.
- $n_2$  et  $f_2$  sont l'effectif et la fréquence de la classe qui suit la classe modale.
- $\Delta_1 = n_0 - n_1$  (ou bien  $\Delta_1 = f_0 - f_1$ )
- $\Delta_2 = n_0 - n_2$  (ou bien  $\Delta_2 = f_0 - f_2$ )

$$M_o = L_i + \frac{n_0 - n_1}{(n_0 - n_1) + (n_0 - n_2)} a_i$$



## chap3 : Les caractéristiques de la tendance centrale (Paramètres de position)

Mo

### Le mode: ( $M_o$ )

Variable continue :Données groupées en classes

Exemple:

| Classe Notes | Nombre des étudiants $n_i$ |
|--------------|----------------------------|
| [0;5[        | 7                          |
| [5;10[       | 14                         |
| [10;15[      | 5                          |
| [15;20]      | 7                          |
| Total        | 33                         |

- La classe modale est [5; 10[
- $L_i=5$
- $n_0=14$
- $n_1=7$
- $n_2=5$
- $a_i=5$

$$M_0 = L_i + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} a_i$$

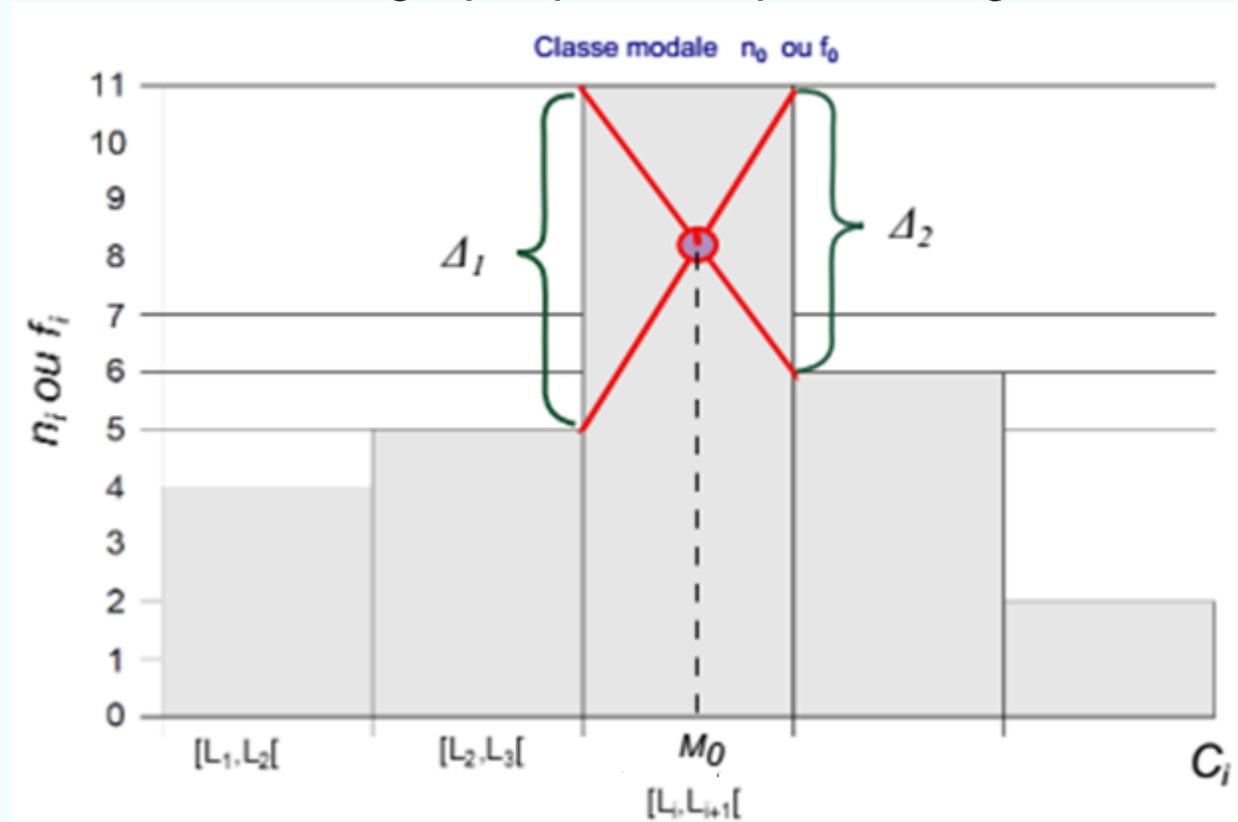
$$M_o = L_i + \frac{n_0 - n_1}{(n_0 - n_1) + (n_0 - n_2)} a_i$$

$$M_o = 5 + \frac{14-7}{(14-7) + (14-5)} \times 5 = 7.19$$



## Le mode: ( $M_o$ )

- On peut déterminer le mode graphiquement par l'histogramme d'effectifs (ou de fréquences)



## chap3 : Les caractéristiques de la tendance centrale (Paramètres de position)

Mo

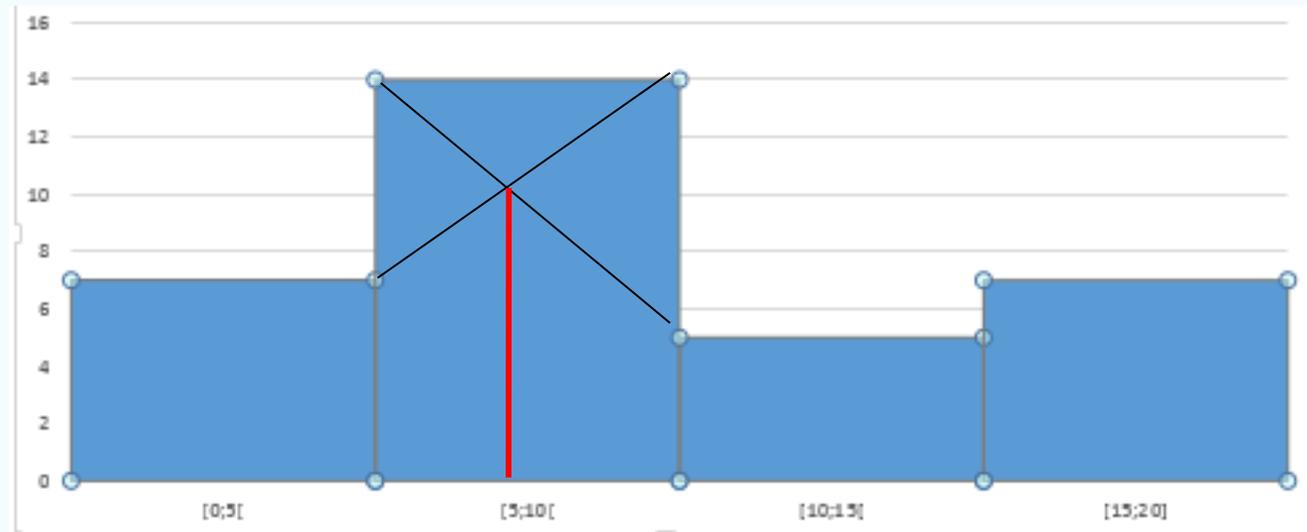
**Le mode:** ( $M_o$ )

**Variable continue :Données groupées en classes**

Exemple:

| Classe Notes | Nombre des étudiants $n_i$ |
|--------------|----------------------------|
| [0;5[        | 7                          |
| [5;10[       | 14                         |
| [10;15[      | 5                          |
| [15;20]      | 7                          |
| Total        | 33                         |

La classe modale est **[5; 10[**



$$M_o = 7.19$$

## chap3 : Les caractéristiques de la tendance centrale (Paramètres de position)

Mo

### Le mode: ( $M_o$ )

Variable continue :Données groupées en classes

#### Remarque:

Dans le cas des **amplitudes inégales**, on utilise les effectifs corrigés  $n_i'$

#### Exercice:

*On considère la variable "temps vécu dans le logement" pour laquelle on a obtenu le tableau d'effectifs suivants :*

- Déterminer le mode de cette série:
  - ✓ Par calcul
  - ✓ Graphiquement

| $x_i$    | $n_i$ |
|----------|-------|
| [0, 1[   | 35    |
| [1, 2[   | 36    |
| [2, 3[   | 32    |
| [3, 5[   | 25    |
| [5, 11[  | 20    |
| [11, 16[ | 18    |
| [16, 21[ | 16    |
| [21, 26[ | 7     |



## chap3 : Les caractéristiques de la tendance centrale (Paramètres de position)

Mo

**Le mode:** ( $M_o$ )

**Variable continue :Données groupées en classes**

| $x_i$    | $n_i$ | $a_i$ | $n_i'$ |
|----------|-------|-------|--------|
| [0, 1[   | 35    | 1     | 35,00  |
| [1, 2[   | 36    | 1     | 36,00  |
| [2, 3[   | 32    | 1     | 32,00  |
| [3, 5[   | 25    | 2     | 12,50  |
| [5, 11[  | 20    | 6     | 3,33   |
| [11, 16[ | 18    | 5     | 3,60   |
| [16, 21[ | 16    | 5     | 3,20   |
| [21, 26[ | 7     | 5     | 1,40   |

classe modale : [1; 2[

$$M_o = 1 + \frac{36-35}{(36-35)+(36-32)} \times 1 = 1.2$$

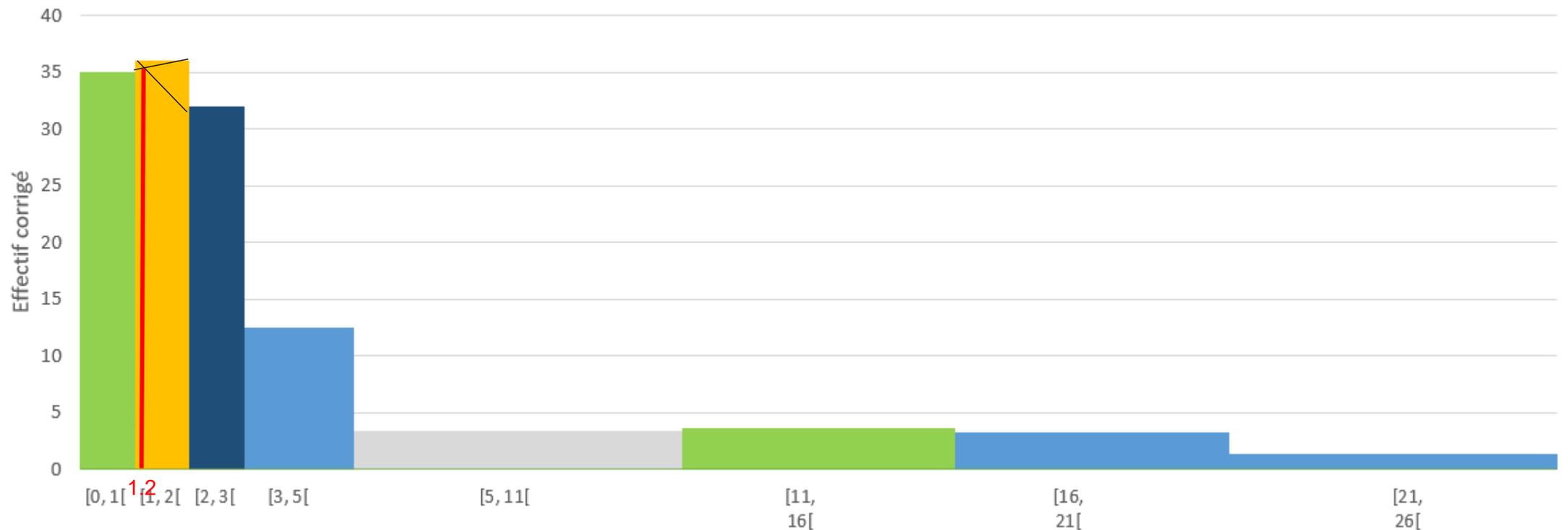


# chap3 : Les caractéristiques de la tendance centrale (Paramètres de position)

Mo

**Le mode:** ( $M_o$ )

Variable continue :Données groupées en classes



Statistique Descriptive

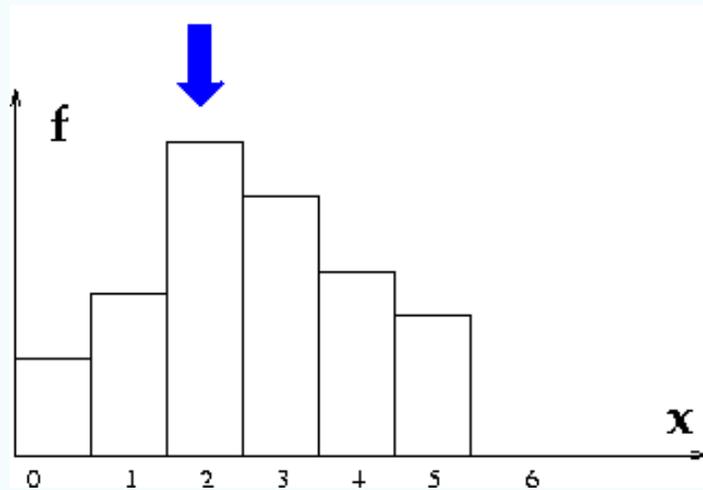


## chap3 : Les caractéristiques de la tendance centrale (Paramètres de position)

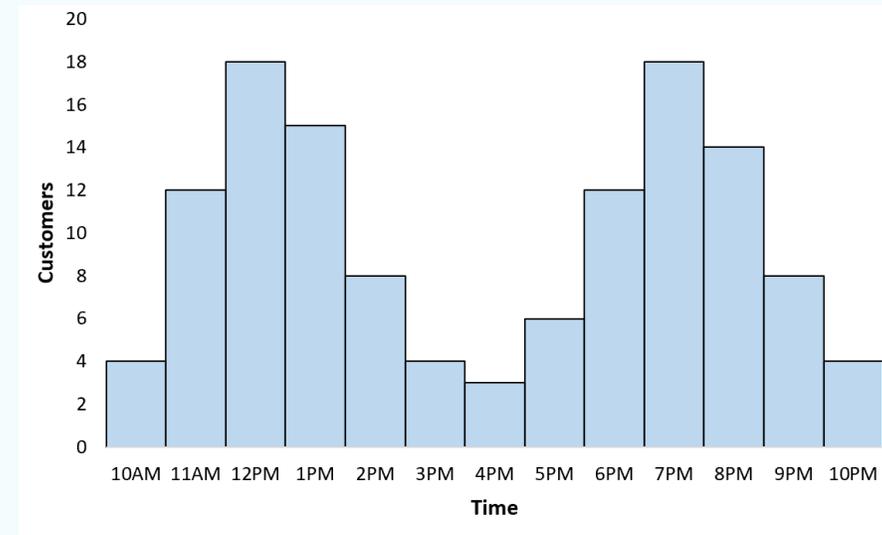
Mo

### Le mode: ( $M_o$ )

*On peut avoir plus d'un mode ou rien.*



Monomodale



bimodale

### Le mode: Avantages / Inconvénients

#### Avantages

- ✓ La détermination graphique du mode est aisée.
- ✓ Il est d'un intérêt capital puisqu'il représente la valeur de la variable la plus observée sur l'échantillon.
- ✓ Faible sensibilité aux valeurs extrêmes
- ✓ Si la population est très hétérogène (p.ex. distribution bimodale), il vaut mieux deux modes qu'une moyenne ou qu'une médiane

#### Inconvénients

- ✗ Le mode n'a de signification véritable que si l'effectif correspondant est nettement supérieur aux effectifs des autres modalités.
- ✗ Il n'a de sens que s'il est unique.
- ✗ Extrême sensibilité aux choix des intervalles de classe
- ✗ Ne se prête pas aux calculs.

$$Mo(ax) \neq a \times Mo(x)$$

$$Mo(x + y) \neq Mo(x) + Mo(y)$$



# Applications

## Application 2 :

- *Le tableau suivant donne la répartition des salaires des employés d'une entreprise en milliers de DH,*

|           |         |        |         |        |          |
|-----------|---------|--------|---------|--------|----------|
| Salaires  | [5 ; 6[ | [6; 7[ | [7 ; 8[ | [8, 9[ | [9 ; 10[ |
| Effectifs | 12      | 5      | 21      | 2      | 4        |

1. *Déterminer la classe modale de cette série.*
2. *Calculer le mode (graphiquement et avec un calcul)*
3. *Interpréter le résultat.*



# Applications

## Application 3 :

1. Calculer le mode de chaque série (graphiquement et avec un calcul).
2. Interpréter le résultat.

| Exemple Nbre pers./voiture |       |
|----------------------------|-------|
| $x_i$                      | $f_i$ |
| 1                          | 10%   |
| 2                          | 25%   |
| 3                          | 40%   |
| 4                          | 25%   |
| Total                      | 100%  |

## Revenu des ménages français

| $x_i$<br>(en euros) | $f_i$ |
|---------------------|-------|
| [0, 1600[           | 45%   |
| [1600, 2400[        | 35%   |
| [2400, 3200[        | 20%   |
| Total               | 100%  |

### La médiane : ( $Me$ )

C'est la valeur qui sépare une série d'observations **ordonnées** en ordre croissant ou décroissant, en deux parties comportant **le même nombre d'observations**.

#### Méthode de calcul-cas général

- Présenter les données sous forme de série
- Ordonner la série par ordre croissant ou décroissant
- Déterminer si la série comprend un nombre pair ou impair d'unités statistiques



### La médiane

Soit N le nombre d'observations:

- ❖ Si N **est impair**, alors la médiane est la valeur qui occupe le  $\frac{N+1}{2}$  rang de la série ordonnée.
- ❖ Si N **est pair**, alors la médiane est la moyenne des valeurs de rang  $\frac{N}{2}$  et  $\frac{N}{2}+1$ .



### La médiane

#### Données brutes:

**Exemple1:** Série statistique du nombre d'enfants à charge de 5 employés d'une entreprise :

$$X=1; 2; 5; 4; 3$$

✓  $X=1; 2; \mathbf{3}; 4; 5$

✓  $N=5$  est impair, La **médiane** est la valeur qui occupe le  $\frac{5+1}{2}$  rang de la série ordonnée.

✓ La médiane est :  $\mathbf{3}$

**Exemple2:** Série statistique du nombre d'enfants à charge de 6 employés d'une entreprise :

$$X=1; 2; 5; 4; 3 ; 1$$

✓  $X=1; 1; \mathbf{2}; \mathbf{3}; 4; 5$

✓  $N=6$  est pair, La **médiane** est la moyenne des valeurs de rang  $\frac{6}{2}$  et  $\frac{6}{2}+1$ .

✓ La médiane est :  $\frac{2+3}{2} = \mathbf{2,5}$



## La médiane

### Données discrètes groupées.

Soit la distribution de 24 étudiants selon leur âge.

| Age $x_i$ | $n_i$ | $N_i \nearrow$ | $F_i \nearrow$ |
|-----------|-------|----------------|----------------|
| 18        | 6     | 6              | 0,25           |
| 19        | 10    | 16             | 0,67           |
| 20        | 4     | 20             | 0,84           |
| 21        | 2     | 22             | 0,92           |
| 22        | 2     | 24             | 1              |
| Total     | 24    | —              | —              |

$N=24$  est pair, La **médiane** est la moyenne des valeurs de rang  $\frac{24}{2}$

$$\Rightarrow 19 \text{ et } \frac{24}{2} + 1 \Rightarrow 19$$

La médiane est alors égale à

$$\frac{19+19}{2} = 19 \text{ ans.}$$



### La médiane

#### Variable continue :Données groupées en classes

Si les données sont **groupées par classes** (cas des variables continues), il faut :

- ❖ localiser la **classe médiane**, c'est-à-dire celle qui contient la médiane.
- ❖ calculer par interpolation linéaire la valeur de la médiane ;
- ❖ ou déterminer graphiquement la médiane par projection à partir de la courbe des **fréquences cumulées**.



### La médiane

#### Détermination de la médiane (Par un calcul ):

- La **classe médiane**  $[a,b[$  est celle dont la **fréquence** cumulée  $F(b)$  est  $\geq 50\%$  (ou Effectif cumulé  $N(b)$  est  $\geq N/2$ ) et dont la classe précédente a une fréquence cumulée  $F(a) < 50\%$  (ou Effectif cumulé  $N(a)$  est  $< N/2$ ).
- La médiane est calculée par la formule:

$$Me = a + \frac{(0,5 - F(a))}{F(b) - F(a)} \times (b - a)$$

$$Me = a + \frac{(N/2 - N(a))}{N(b) - N(a)} \times (b - a)$$



## chap3 : Les caractéristiques de tendance centrale (Paramètres de position)

Me

### La médiane

Exemple: Salaires mensuels des employés de l'entreprise Y

| Classes de salaire | Effectifs ( $n_i$ ) | Fréquences ( $f_i = \frac{n_i}{N}$ ) | Fréquences cumulées |
|--------------------|---------------------|--------------------------------------|---------------------|
| [800, 900[         | 21                  | 0,20                                 | 0,20                |
| [900 ; 1 000[      | 13                  | 0,12                                 | 0,32                |
| [1 000 ; 1 100[    | 57                  | 0,54                                 | 0,86                |
| [1 100 ; 1 200[    | 10                  | 0,09                                 | 0,95                |
| [1 200 ; 1 300[    | 5                   | 0,05                                 | 1,00                |
| <b>Total</b>       | <b>106</b>          | 1,00                                 | -                   |

**NB** : La **classe médiane** est celle dont la **fréquence cumulée** est  $\geq 50\%$  et dont la classe précédente a une fréquence cumulée  $< 50\%$ .

$$Me = a + \frac{(0,5 - F(a))}{F(b) - F(a)} \times (b - a)$$

La classe médiane est : **[1000;1100[**

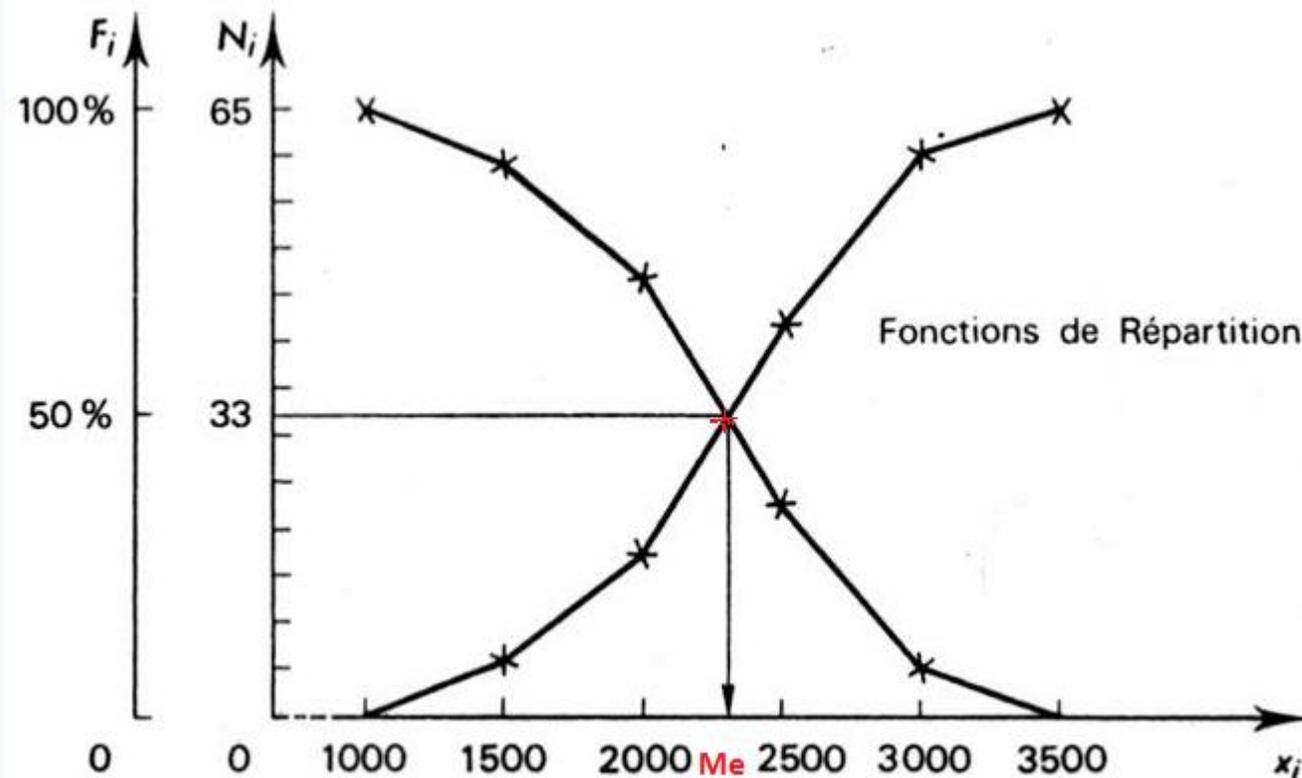
$$\text{Médiane Me} = 1\ 000 + \frac{0,50 - 0,32}{0,86 - 0,32} \times (1\ 100 - 1\ 000)$$

$$Me = 1\ 033,3$$



## La médiane

Détermination de la médiane ([Graphiquement](#)):



### La médiane: Avantages / Inconvénients

#### Avantages

- ✓ Son calcul est facile.
- ✓ Linéarité :  $Me(ax) = a \times Me(x)$
- ✓ Elle donne une idée satisfaisante de la tendance centrale de la distribution.
- ✓ Elle n'est pas influencée par les valeurs extrêmes de la distribution (valeurs aberrantes).
- ✓ La médiane  $Me$  possède la propriété suivante:  
$$\sum_i |x_i - M_e| \leq \sum_i |x_i - x_0|$$
, pour toute valeur  $x_0$  de la série différente de la médiane.

#### Inconvénients

- Elle ne tient pas compte des valeurs prises par la variable mais seulement de leurs ordres de grandeur.
- Se prête mal aux calculs :

$$Me(x + y) \neq Me(x) + Me(y)$$



### Application 4:

- Quelle est la médiane des séries suivantes ?

✓ Série 1 : 2, 2, 2, 3, 3.

✓ Série 2 : 2, 2, 2, 5, 5, 6.

- Réponses

✓ Série 1 : La médiane est 2.

✓ Série 2 : La médiane est 3,5 (entre 2 et 5).



### Quantiles: Quartiles, Déciles, Centiles...

- La médiane est la valeur qui divise la population en deux sous-populations de tailles égales.
- De la même façon, on peut définir des valeurs qui divisent la population en quatre, dix, cent, ... **sous-populations de tailles égales**.
- Les **quartiles** sont les trois valeurs qui partagent la population en **quatre groupes** de même effectif (25% de la population). Le deuxième quartile est la médiane.
- La définition des **déciles** et des **centiles** est analogue à celle des quartiles en remplaçant 25% respectivement par 10% et 1%.



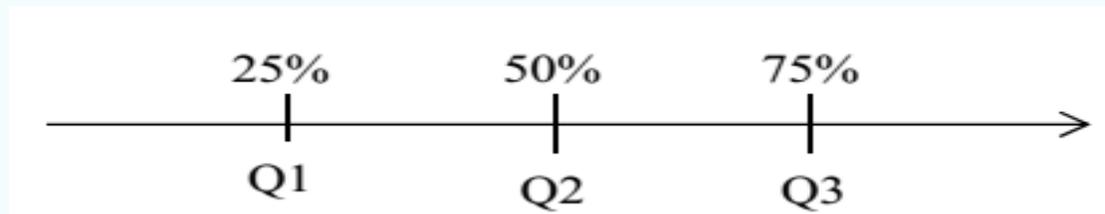
## chap3 : Les caractéristiques de tendance centrale (Paramètres de position)

Q

### Quartiles:

On définit les notions de **quartiles**: ils sont au nombre de trois :

- $Q_1$  avec 25 % de valeurs inférieures et 75 % de valeurs supérieures.
- $Q_2$  avec 50 % de valeurs inférieures et 50 % de valeurs supérieures,  $Q_2$  est la **médiane**.
- $Q_3$  avec 75% des valeurs inférieures et 25% des valeurs supérieures.



### Les quintiles:

- Ils divisent la série en **cinq** sous-ensembles de tailles égales, soit **20%**.
- Ils sont au nombre de **quatre**.

### Les déciles :

- Ils divisent la série en **dix** sous-ensembles de tailles égales, soit **10%**

### Les centiles :

- Ils divisent la série en **cent** sous-ensembles de **1%**



## chap3 : Les caractéristiques de tendance centrale (Paramètres de position)



|               |                           |                                 |       |
|---------------|---------------------------|---------------------------------|-------|
| la médiane    | $m_e$                     | deux classes d'effectif $n/2$   | (50%) |
| les quartiles | $q_1, q_2 = m_e, q_3$     | quatre classes d'effectif $n/4$ | (25%) |
| les quintiles | $r_1, r_2, r_3, r_4$      | cinq classes d'effectif $n/5$   | (20%) |
| Les déciles   | $d_1, d_2, \dots, d_9$    | dix classes d'effectif $n/10$   | (10%) |
| Les centiles  | $c_1, c_2, \dots, c_{99}$ | cent classes d'effectif $n/100$ | (1%)  |



### Détermination des quantiles

- Les quantiles sont déterminés de la même manière que la médiane soit par:
  - ✓ calcul.
  - ✓ Ou graphiquement à partir de la courbe des fréquences cumulées;

- Les quartiles sont les valeurs dont les fréquences cumulées sont respectivement :

$$F(Q_1) = \frac{1}{4} = 25\%; F(Q_2) = \frac{2}{4} = 50\%; F(Q_3) = \frac{3}{4} = 75\%$$

- Les déciles :  $F(D_i) = \frac{i}{10}, i = 1, 2, \dots, 9$
- Les centiles :  $F(C_i) = \frac{i}{100}, i = 1, 2, \dots, 99$



### Exemple :quartiles

**variable discrète:** Le tableau suivant donne la répartition des notes de 31 élèves.

| Notes | Effectif | Eff cumulé<br>Croissant |
|-------|----------|-------------------------|
| 5     | 1        | 1                       |
| 8     | 2        | 3                       |
| 9     | 6        | 9                       |
| 10    | 7        | 16                      |
| 11    | 5        | 21                      |
| 12    | 4        | 25                      |
| 14    | 3        | 28                      |
| 16    | 2        | 30                      |
| 18    | 1        | 31                      |

Calculer les quartiles :Q1,Q2 et Q3?

On a

- $N=31$
- $N/4 = 7.75$  donc  $Q1 = 9$
- $N/2=15.5$  donc  $Q2=Me = 10$
- $3N/4 = 23.25$  donc  $Q3 = 12$



## chap3 : Les caractéristiques de tendance centrale (Paramètres de position)

Q

### Exemple :quartiles

variable continue:

Une enquête est effectuée pour étudier le temps (en minutes) consacré au sport, semaine, par les 1312 employés d'une usine. Les résultats, regroupés en classes, indiqués dans le tableau suivant :

Calculer les quartiles :Q1,Q2 et Q3?

| Temps (min) | C <sub>i</sub> | Effectifs | Fréquence<br>100 f <sub>i</sub> % | Fréq cumul<br>croissante % |
|-------------|----------------|-----------|-----------------------------------|----------------------------|
| [0 ; 30[    | 15             | 175       | 13                                | 13                         |
| [30 ; 60[   | 45             | 392       | 30                                | 43                         |
| [60 ; 90[   | 75             | 267       | 21                                | 64                         |
| [90 ; 120[  | 105            | 127       | 9                                 | 73                         |
| [120 ; 150[ | 135            | 168       | 13                                | 86                         |
| [150 ; 180[ | 165            | 120       | 9                                 | 95                         |
| [180 ; 240[ | 210            | 63        | 5                                 | 100                        |
|             |                |           |                                   | Total                      |

$$Q2=Me= a + \frac{(0,5 - F(a))}{F(b) - F(a)} \times (b - a)$$

$$Q1= 30 + \frac{25 - 13}{43 - 13} \times (60 - 30) = 42$$

$$Q2= 60 + \frac{50 - 43}{64 - 43} \times (90 - 60) = 70$$

$$Q3= 120 + \frac{75 - 73}{86 - 73} \times (150 - 120) = 124,62$$

## chap3 : Les caractéristiques de tendance centrale (Paramètres de position)

### Application 5: (A faire)

On observe les arrivées des clients à un bureau de poste pendant un intervalle de temps (15 minutes). En répétant 100 fois cette observation, on obtient les résultats suivants :

| Nombre d'arrivées     | 1  | 2  | 3  | 4  | 5 | 6 | Total |
|-----------------------|----|----|----|----|---|---|-------|
| Nombre d'observations | 15 | 25 | 26 | 20 | 7 | 7 | 100   |

Travail à faire:

1. Calculer la médiane de cette distribution
2. Calculer le 1er et le 3ème quartile
3. Calculer le 1er et le 9ème décile



### Application 6: (A faire)

Le tableau suivant indique la distribution des salaires mensuels (en 100 DH) des employés dans une entreprise commerciale.

Travail à faire:

1. Déterminer les centres des classes et les amplitudes
2. Calculer les fréquences cumulées croissantes des différentes modalités.
3. Représenter graphiquement la distribution par la courbe des fréquences cumulées croissantes
4. Calculer la médiane de cette distribution (graphiquement et par calcul)
5. Calculer le 1er et le 3ème quartile (graphiquement et par calcul)
6. Calculer le 1er et le 9ème décile (graphiquement et par calcul)

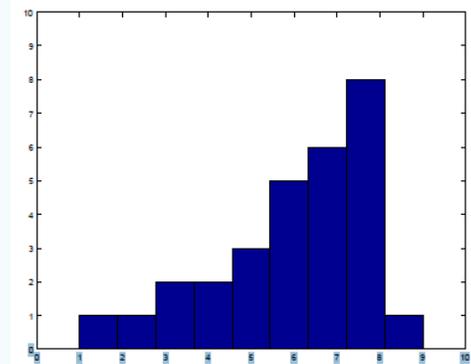
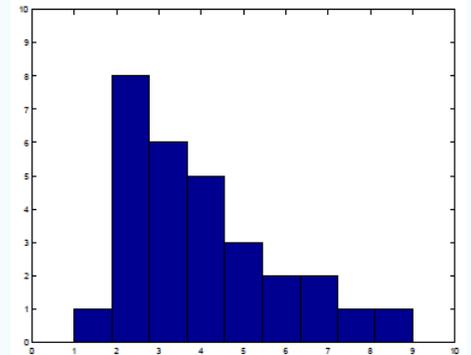
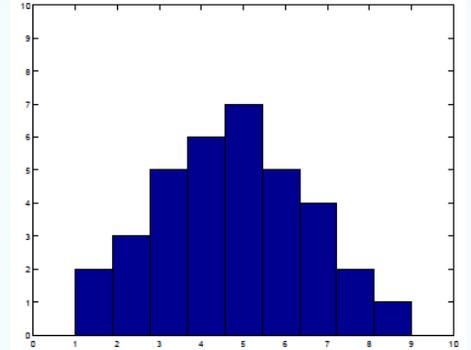
| Salaire mensuel | Effectifs |
|-----------------|-----------|
| 10 à 20         | 180       |
| 20 à 30         | 210       |
| 30 à 40         | 470       |
| 40 à 50         | 108       |
| 50 à 60         | 850       |
| 60 à 70         | 110       |
| Total           | 1 928     |

## chap3 : Les caractéristiques de tendance centrale (Paramètres de position)

### Synthèse: Comparaison Mode-Moyenne- Médiane

Il n'y a pas de règle générale entre les trois quantités. On peut distinguer cependant trois cas :

- Si la distribution est symétrique :  
**mode  $\simeq$  moyenne  $\simeq$  médiane**
- Si la distribution est disymétrique étalée à droite :  
**mode < médiane < moyenne**
- Si la distribution est disymétrique étalée à gauche :  
**moyenne < médiane < mode**



## chap3 : Les caractéristiques de tendance centrale (Paramètres de position)

### Synthèse:

|           | Quantitative | Ordinale | Nominale |
|-----------|--------------|----------|----------|
| Moyenne   | OUI          | NON      | NON      |
| Médiane   | OUI          | OUI      | NON      |
| Quantiles | OUI          | OUI      | NON      |
| Mode      | OUI          | OUI      | OUI      |

