



Université Abdelmalek Essaadi
ENCG - TANGER



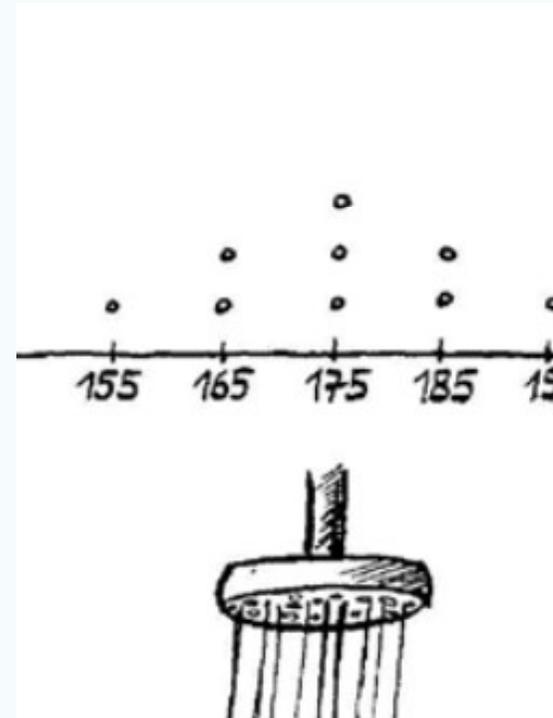
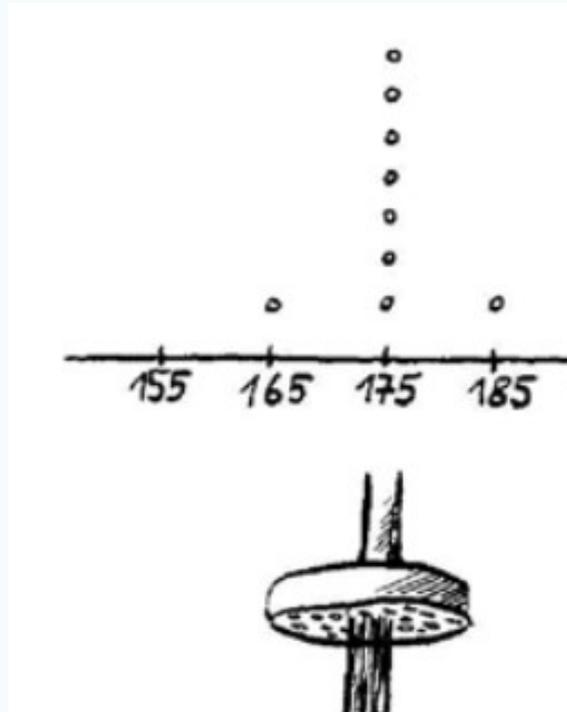
Semestre 2

chap5 : Les caractéristiques de forme



Prof: Abdelali ZBAKH <a.zbakh@uae.ac.ma>

Rappel : dispersion



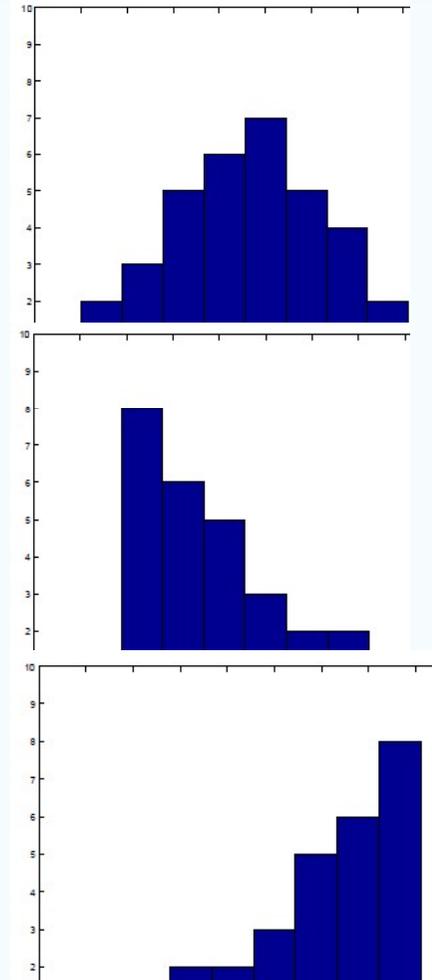
chap5 : Les caractéristiques de forme (Indicateurs de forme)

Rappel: Comparaison Mode-Moyenne- Médiane

Il n'y a pas de règle générale entre les trois quantités. On peut distinguer cependant trois cas :

- Si la distribution est symétrique :
mode \simeq moyenne \simeq médiane
- Si la distribution est disymétrique étalée à droite :
mode < médiane < moyenne
- Si la distribution est disymétrique étalée à gauche :
moyenne < médiane < mode

Comment calculer l'asymétrie d'une série statistique ?



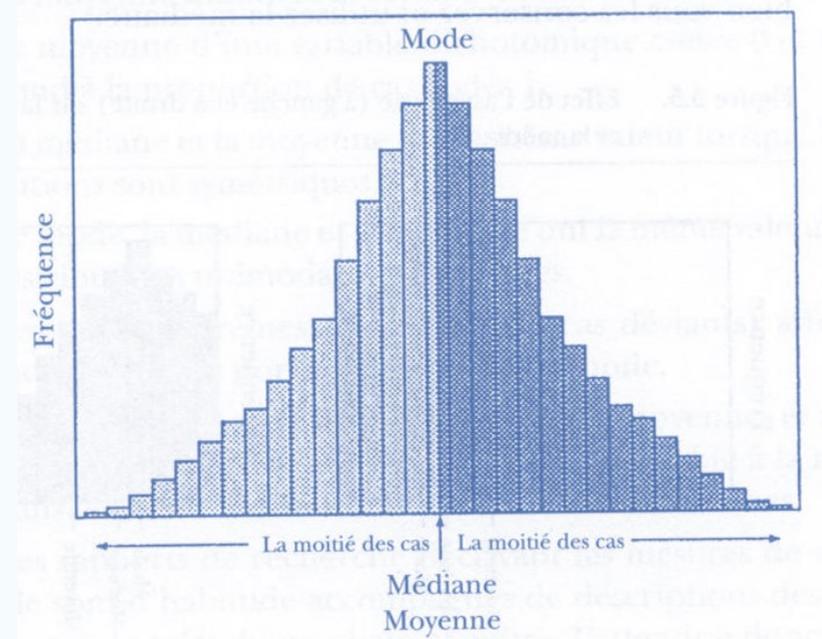
chap5 : Les caractéristiques de forme (Indicateurs de forme)

Mesure de l'asymétrie

Une série a **une distribution symétrique** si ses valeurs sont également dispersées de part et d'autre de la valeur centrale, c'est-à-dire si le graphe de la distribution (histogramme ou diagramme en bâtons en fréquences) admet un axe de symétrie.

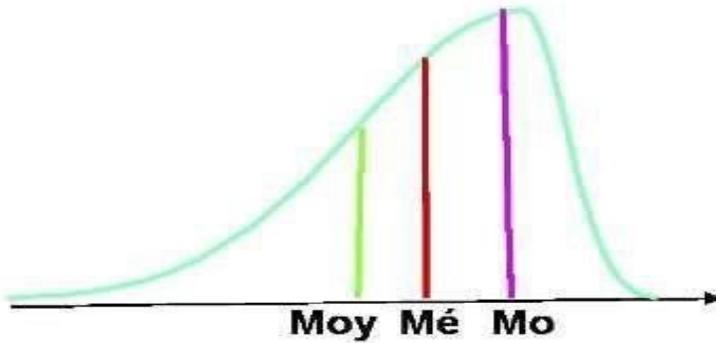
- Dans une distribution **parfaitement symétrique**, on a

$$Me = Mo = \bar{x}$$

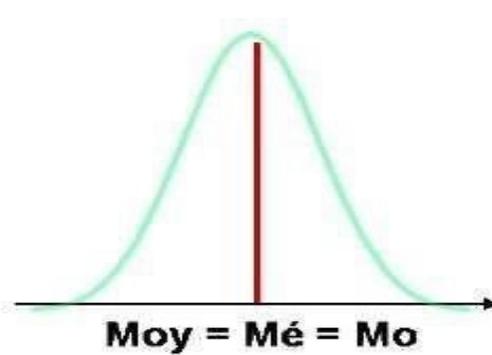


chap5 : Les caractéristiques de forme (Indicateurs de forme)

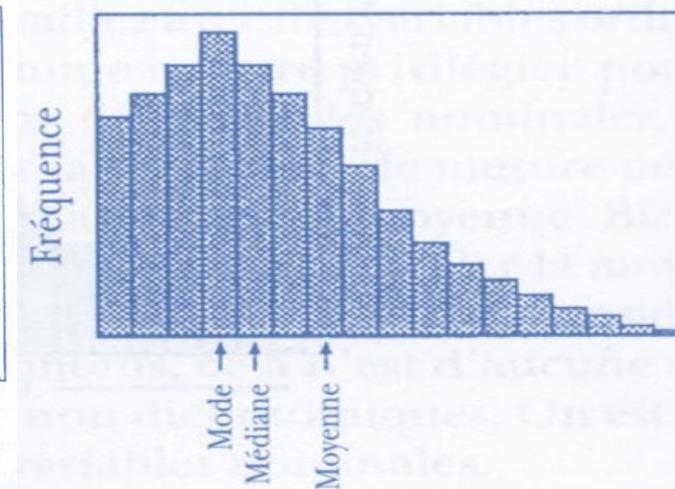
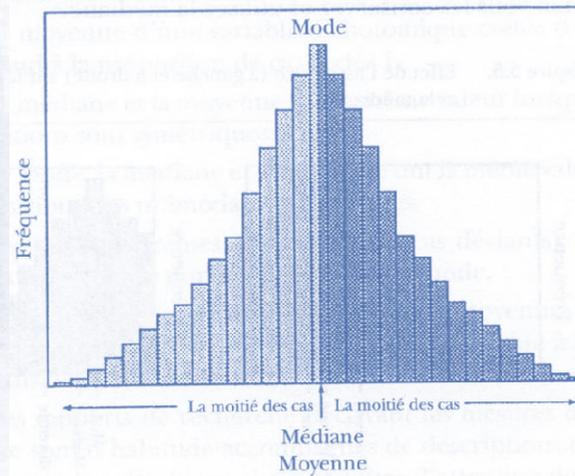
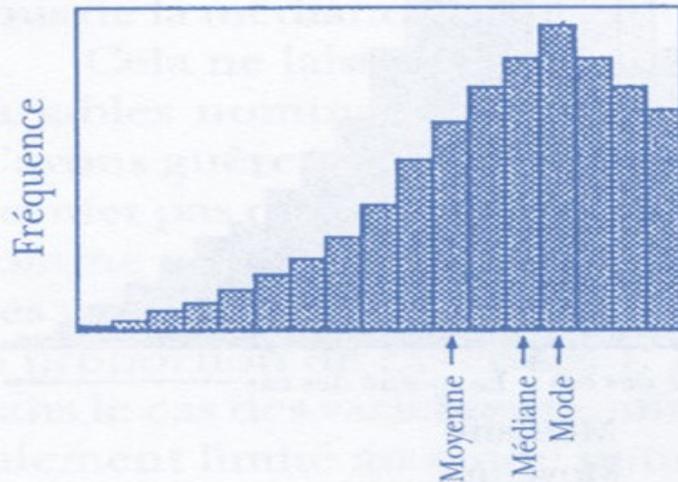
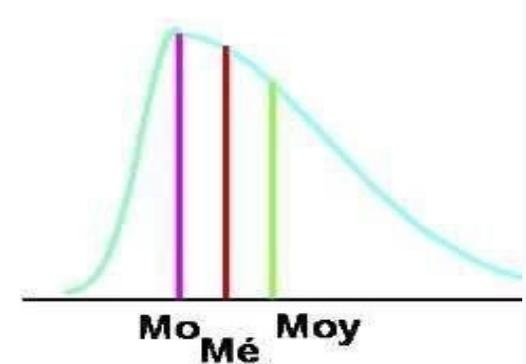
**Oblique à droite
(étalée vers la gauche)**



symétrique



**Oblique à gauche
(étalée vers la droite)**



chap5 : Les caractéristiques de forme (Indicateurs de forme)

Mesure de l'asymétrie

Certains coefficients (indices) permettent de situer la distribution dans un des trois cas précédents:

- ✓ Coefficient de Yule (C_Y)
- ✓ Coefficient de Pearson (δ)
- ✓ Coefficient de Fisher (γ)



chap5 : Les caractéristiques de forme (Indicateurs de forme)

Mesure de l'asymétrie : Coefficient de Yule

Le coefficient de Yule , s'exprime par :

$$C_Y = \frac{(Q_3 - Me) - (Me - Q_1)}{(Q_3 - Me) + (Me - Q_1)}$$

$$C_Y = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Me}{Q_3 - Q_1}$$

- Si $C_Y = 0$ alors la distribution est **symétrique**.
- Si $C_Y > 0$ alors la distribution est **étirée** vers la **droite**.
- Si $C_Y < 0$ alors la distribution est **étirée** vers la **gauche**

Avec

- Me: la médiane de la série.
- Q1 et Q3 sont, respectivement, le premier quartile et le troisième quartile de la série.

Pour les déciles:

$$C_Y = \frac{(D_9 - D_5) - (D_5 - D_1)}{(D_9 - D_1)}$$



chap5 : Les caractéristiques de forme (Indicateurs de forme)

Mesure de l'asymétrie : Coefficient de Pearson

Le coefficient de Pearson , s'exprime par :

$$\delta = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma}$$

- Si $\delta = 0$ alors la distribution est **symétrique**.
- Si $\delta > 0$ alors la distribution est **étirée** vers la **droite**.
- Si $\delta < 0$ alors la distribution est **étirée** vers la **gauche**

Avec

- \bar{x} : c'est la moyenne arithmétique de la série.
- Mo : c'est le mode de la série.
- σ : c'est l'écart type de la série

Remarque : on a toujours
 $-1 \leq \delta \leq 1$



Mesure de l'asymétrie : Coefficient de Fisher

Le coefficient de Fisher , s'exprime par :

$$\gamma = \frac{m_3}{\sigma^3}$$

- Si $\gamma = 0$ alors la distribution est **symétrique**.
- Si $\gamma > 0$ alors la distribution est **étirée** vers la **droite**.
- Si $\gamma < 0$ alors la distribution est **étirée** vers la **gauche**

Avec

- m_3 : c'est le moment centré d'ordre 3
- σ : c'est l'écart type de la série



chap5 : Les caractéristiques de forme (Indicateurs de forme)

Mesure de l'asymétrie : Coefficient de Fisher

Moments: On appelle moments à l'origine d'ordre $r \in \mathbb{N}$, le paramètre :

- Cas d'une série discrète:

$$m'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^r$$

$$m'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^r$$

- Cas d'une série continue, avec c_i le centre de la classe

$$m'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i c_i^r$$



chap5 : Les caractéristiques de forme (Indicateurs de forme)

Mesure de l'asymétrie : Coefficient de Fisher

Moments centrés: On appelle moments centrés d'ordre $r \in \mathbb{N}$, le paramètre:

$$m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^r$$

- Cas d'une série discrète:

$$m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^r$$

- Cas d'une série continue:
avec c_i le centre de la classe

$$m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (c_i - \bar{x})^r$$



chap5 : Les caractéristiques de forme (Indicateurs de forme)

Mesure de l'asymétrie : Coefficient de Fisher

Moments : Cas particuliers

$$m'_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x} \Rightarrow \text{Moyenne arithmétique}$$

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x} = 0$$

$$m'_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = V_x^2 + \bar{x}^2 \Rightarrow \text{d'après théorème Koenig}$$

$$m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = V_x \Rightarrow \text{Variance}$$



chap5 : Les caractéristiques de forme (Indicateurs de forme)

Mesure de l'asymétrie :

Exemple:

Classes	n_i	Ni cc
[50,70[6	6
[70,100[9	15
[100,130[15	30
[130,150[23	53
[150,180[17	70
[180,200[5	75
Total	75	

- Mesurer l'asymétrie?

✓ Coefficient de Yule:

$$C_Y = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Me}{Q_3 - Q_1} = \frac{155.7 + 107.5 - 2 \times 136.5}{155.7 - 107.5} = -0.2 < 0$$

✓ Coefficient de Pearson : $\delta = \frac{\bar{x} - M_3}{\sigma}$

$$\delta = \frac{131 - 141.42}{35.03} = \frac{131 - 141.42}{35.03} = -0.29 < 0$$

✓ Coefficient de Fisher:

$$Y = \frac{m_3}{\sigma^3}$$

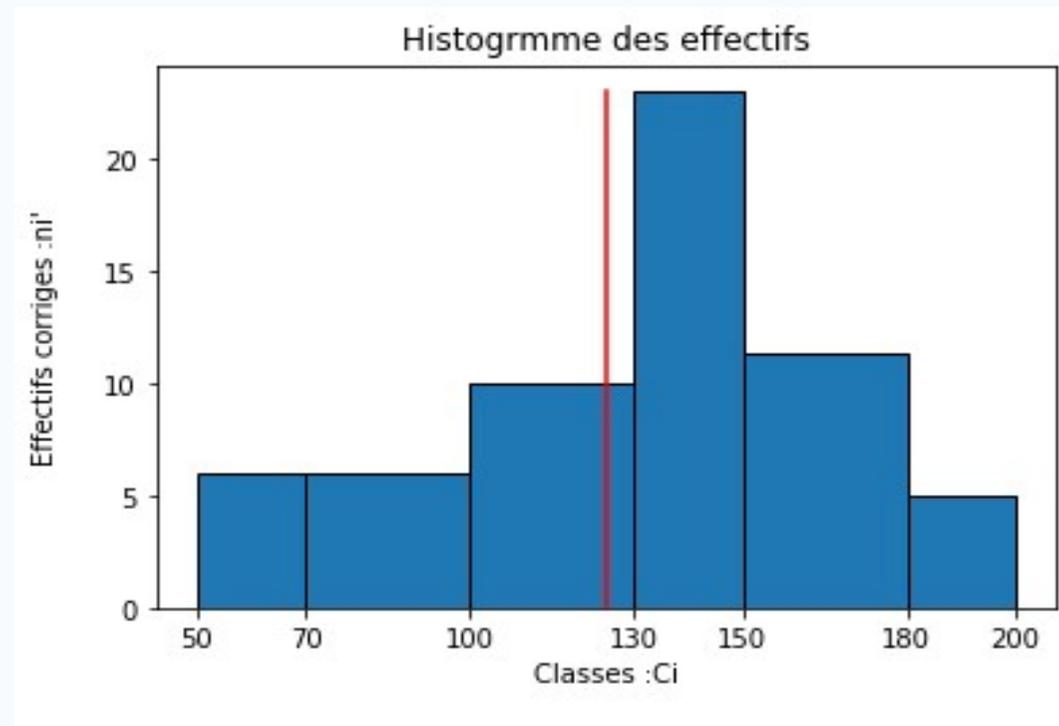
Moyenne	=	131
Variance	=	1227
Ecart type	=	35,03
Moment d'ordre 3	=	-18308,7
Coefficient de Fisher	=	-18308,7 / 35,03^3

chap5 : Les caractéristiques de forme (Indicateurs de forme)

Mesure de l'asymétrie :

Exemple:

Donc la distribution est étirée vers la gauche.



Mesure de l'aplatissement:

Les indicateurs d'asymétrie et d'aplatissement permettent de faire la comparaison entre les distributions statistiques.

- L' **asymétrie** : d'une distribution peut être approchée par une comparaison entre le mode, la médiane et la moyenne arithmétique.
- L' **aplatissement** peut être approchée par l'étude des observations aux alentours du mode.
 - ✓ Plus le nombre d'individus aura une valeur proche du mode de la distribution plus la courbe sera concentrée et plus l'aplatissement sera faible.
 - ✓ Dans la pratique, pour mesurer l'aplatissement d'une série on compare le graphique de la série avec la distribution dite **normale**.



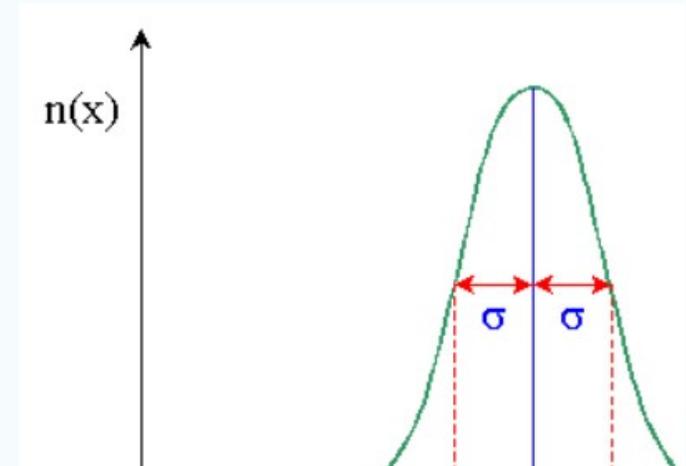
chap5 : Les caractéristiques de forme (Indicateurs de forme)

Mesure de l'aplatissement: Présentation de la loi normale

- La **loi normale** représente une distribution théorique qui est parfaitement connue sur le plan mathématique. Elle a été définie par Laplace et Gauss. Son graphique est de la forme d'une «**cloche**»(beaucoup d'individus autour de la moyenne ; de moins en moins au fur à mesure qu'on s'en éloigne, et ceci de façon symétrique).
- L'équation de la courbe de fréquence d'une distribution normale ne dépend que de deux paramètres :

- ✓ la **moyenne** de la variable (m) ;
- ✓ l'**écart type** de la variable (σ).

$$n(x) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

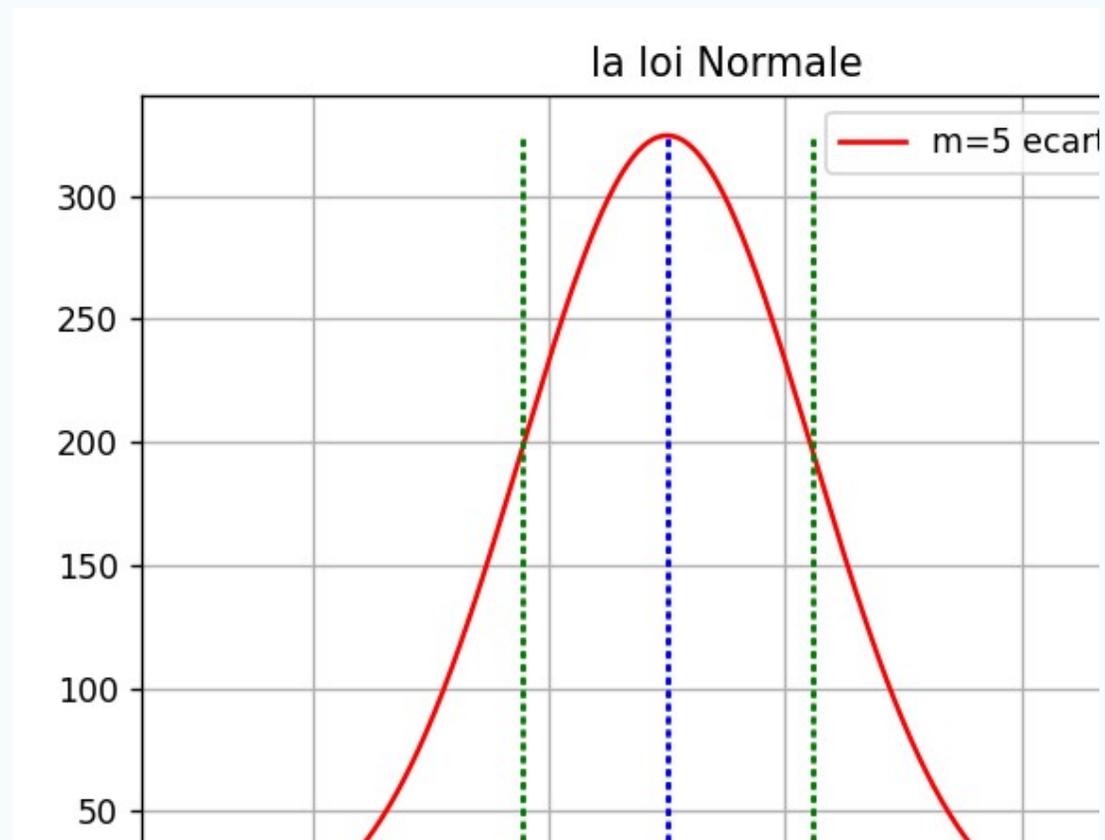


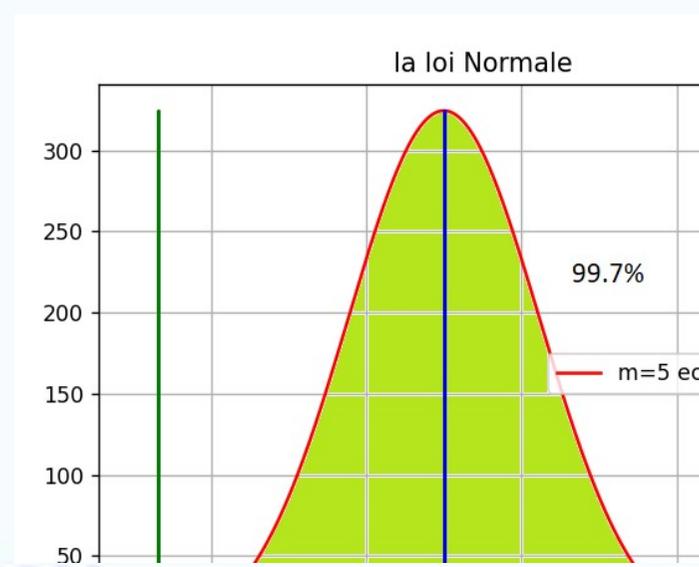
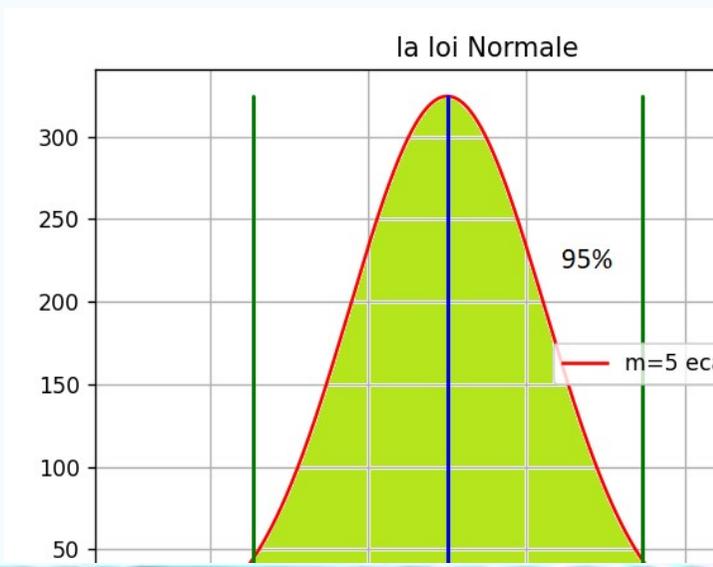
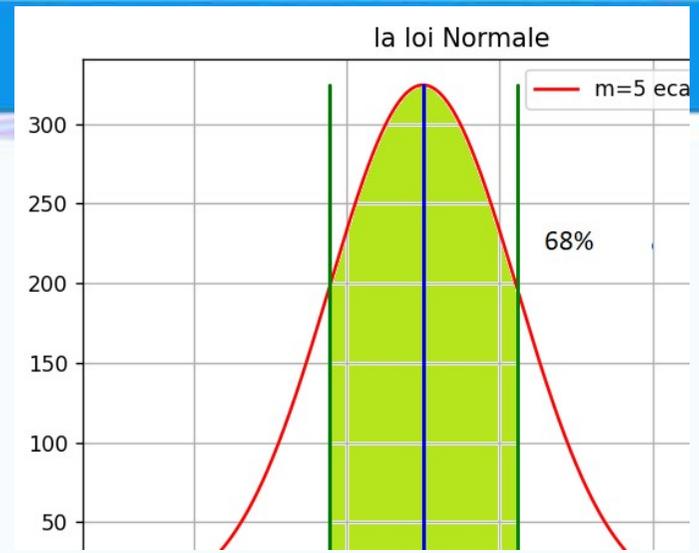
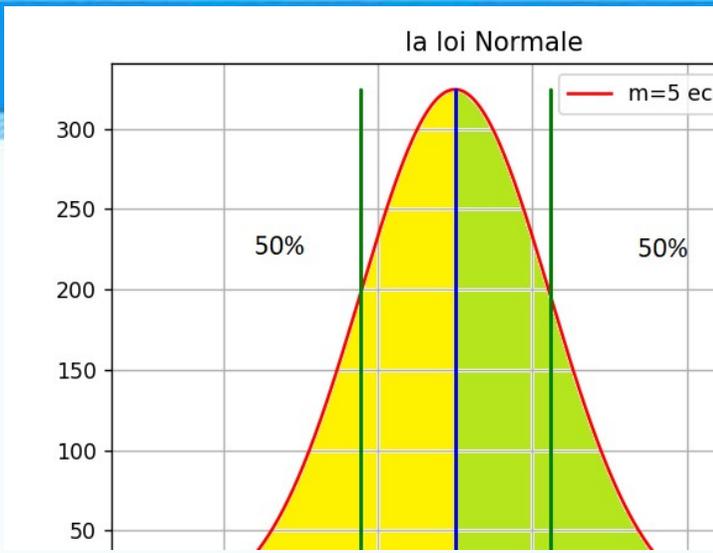
- N: le nombre total d'individus dans l'échantillon
- $n(x)$ le nombre d'individus pour lesquels la grandeur analysée a la valeur x

chap5 : Les caractéristiques de forme (Indicateurs de forme)

Mesure de l'aplatissement: Présentation de la loi normale

- Exemple:





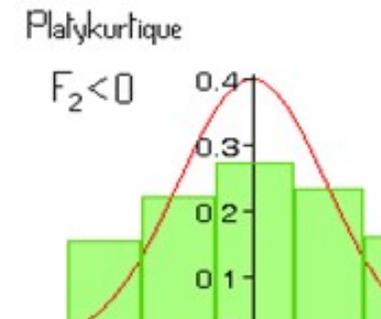
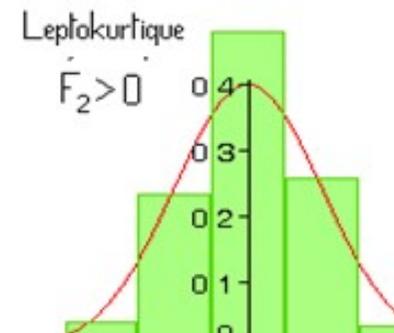
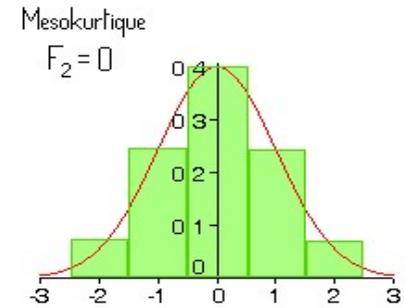
chap5 : Les caractéristiques de forme (Indicateurs de forme)

Mesure de l'aplatissement:

- Une distribution peut être plus ou moins aplatie selon qu'une proportion plus ou moins grande des observations est proche de son mode.
- Lorsqu'une forte proportion des observations prend une valeur proche de celle du mode de la distribution, l'aplatissement est faible.

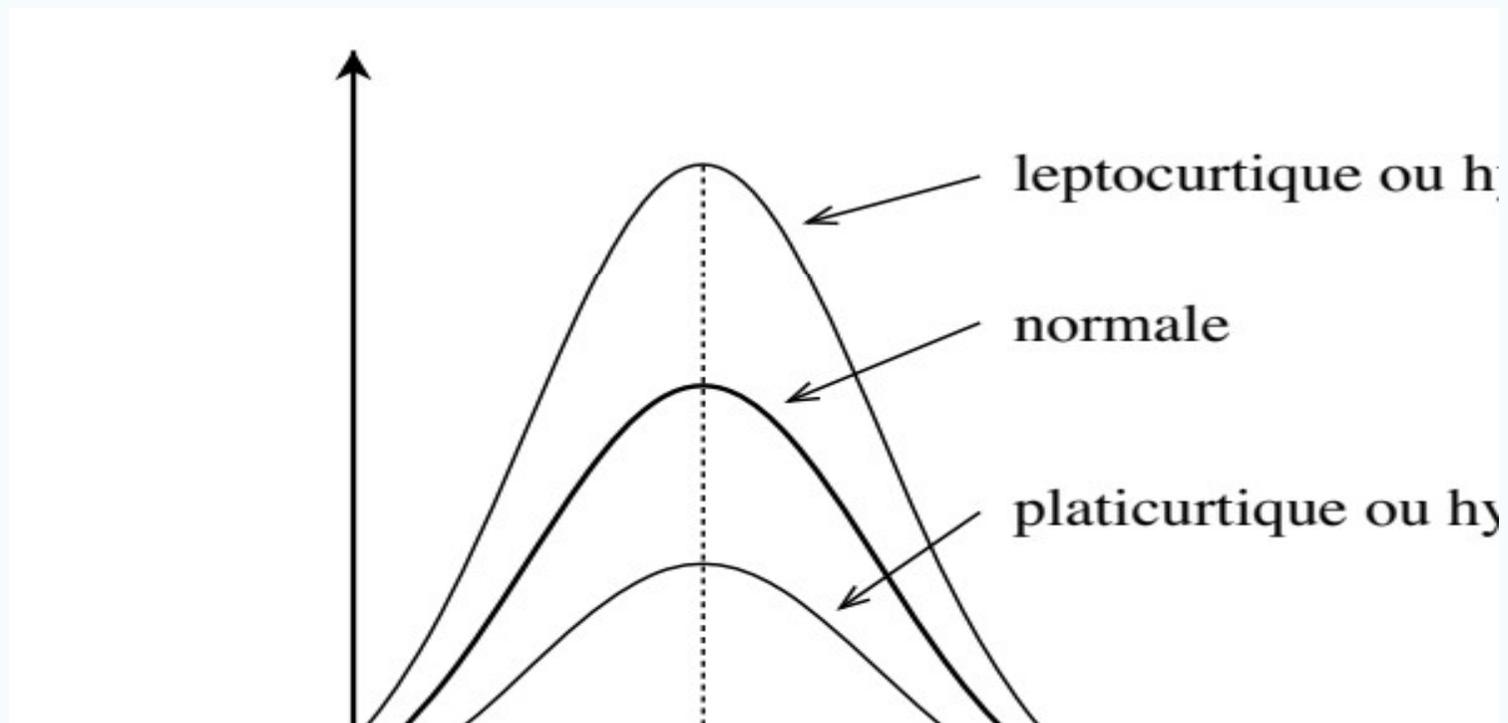
On parle d'une distribution :

- ✓ **mésokurtique**, si cette distribution est similaire à une distribution normale centrée réduite ($N(0,1)$)
- ✓ **leptokurtique**, si cette distribution est moins plate que la distribution normale ;
- ✓ **platykurtique**, si cette distribution est plus plate que la distribution normale.
 - méso (« moyen »), et de κυρτός (« courbé »)
 - leptós (« mince »), et de κυρτός (« courbé »)
 - platús (« plat »), et de κυρτός (« courbé »)



chap5 : Les caractéristiques de forme (Indicateurs de forme)

Mesure de l'aplatissement:



Mesure de l'aplatissement: Coefficient d'aplatissement

- Le coefficient d'aplatissement de Pearson:

$$\beta = \frac{m_4}{\sigma^4}$$

- Le coefficient d'aplatissement de Yule:

$$F_2 = \beta - 3 = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3$$

Avec

$m_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4$ sont les moments centrés d'ordre 4.

$\sigma = \sqrt{V}$ est l'écart-type de la série.

- Si $\beta = 3$ (équivalent à $F_2 = 0$) alors la distribution est *mésokurtique* = Normale
- Si $\beta > 3$ (équivalent à $F_2 > 0$) alors la distribution est *leptokurtique* = moins plate que la loi Normale
- Si $\beta < 3$ (équivalent à $F_2 < 0$) alors la distribution est *platykurtique* = plus plate que la loi Normale.

chap5 : Les caractéristiques de forme (Indicateurs de forme)

Mesure de l'aplatissement: Coefficient d'aplatissement

Exemple:

- On désire étudier l'aplatissement de la distribution du chiffres d'affaires journalier de 75 épiciers:
- Calculons le coefficient β de Person sur le relevé des données suivantes:

Chiffre d'affaire (en €)	effectifs
[215 235[4
[235 255[6
[255 275[13
[275 295[22
[295 315[15
[315 335[6
[335 355[5
[355 375[4

On a:

$$N=75$$

$$\beta = \frac{m_4}{\sigma^4}$$

$$m_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^8 n_i (c_i - \bar{x})^4$$



chap5 : Les caractéristiques de forme (Indicateurs de forme)

Mesure de l'aplatissement: Coefficient d'aplatissement

Exemple:

X_i (centre)	effectifs n_i	$x_i - \bar{x}$	$n_i (x_i - \bar{x})^4$
225	4	-65,6	74 075 629,16
245	6	-45,6	25 942 428,06
265	13	-25,6	5 583 457,48
285	22	-5,6	21 635,89
305	15	14,4	644 972,54
325	6	34,4	8 402 045,34
345	5	54,4	43 789 058,05

- $\sigma = 33,88 \text{ €}$
- $m_4 = (281\,020\,067,84) / 75$

le coefficient de Pearson est égal à :

$$\beta = \frac{m_4}{\sigma^4}$$
$$\beta = \frac{1}{75} * \frac{281\,020\,067}{(33,88)^4} = 2,84$$

$\beta < 3$: la distribution du chiffres d'affaires journalier dans 75 épiceries est platykurtique (c-à-d plus aplatie que la distribution de la loi normale)



chap5 : Les caractéristiques de forme (Indicateurs de forme)

Application 1:

Voici la distribution des tarifs horaires des électriciens d'une association X

Tarif horaire	Nombre de membres
[20 ; 23[66
[23 ; 26[244
[26 ; 29[321
[29 ; 32[506
[32 ; 35[113
[35 ; 38[46
[38 ; 41[13

étudier l'aplatissement de la distribution



chap5 : Les caractéristiques de forme (Indicateurs de forme)

Application 2:

Voici la distribution du nombre d'élèves par classe pour l'ensemble des gymnases

Calculer

- les coefficients de forme.
- Interpréter.

Nombre d'élèves par classe	Nombre de classe
16	8
17	17
18	33
19	128
20	206
21	173
22	85
23	72
24	51
25	14



chap5 : Les caractéristiques de forme (Indicateurs de forme)

Application 3:

- On dispose de 3 séries statistiques qui représentent le temps passé par des élèves du Bac scientifique à compléter un examen de mathématique. 40 élèves ont été sélectionnés dans trois écoles pour réaliser ces tests. Le temps est mesuré en minutes.
- Pour chaque école, calculer et interpréter le coefficient d'asymétrie et d'aplatissement pour des données quantitatives



Maths	School	Maths	School	Maths	School
43.78	A	28.41	B	40.68	C
43.83	A	37.80	B	42.50	C
44.11	A	42.82	B	44.23	C
45.21	A	43.74	B	44.30	C
45.56	A	43.88	B	44.79	C
46.64	A	44.56	B	45.01	C
46.85	A	45.07	B	45.11	C
47.02	A	45.26	B	45.28	C
47.04	A	45.76	B	45.58	C
47.24	A	45.95	B	46.09	C
48.23	A	46.22	B	46.32	C
48.31	A	47.07	B	46.51	C
48.47	A	47.40	B	46.66	C
48.50	A	47.48	B	46.92	C
48.51	A	47.68	B	47.36	C
48.91	A	47.74	B	48.43	C
48.96	A	48.30	B	48.45	C
49.20	A	48.52	B	49.00	C
49.23	A	48.85	B	49.20	C
49.23	A	49.38	B	49.62	C
49.51	A	49.71	B	49.97	C
49.55	A	49.79	B	50.23	C
49.66	A	49.96	B	50.79	C
50.16	A	50.13	B	50.99	C
50.27	A	50.49	B	51.33	C
51.18	A	50.89	B	51.87	C
51.20	A	50.92	B	51.96	C
51.41	A	51.38	B	52.00	C
52.54	A	51.54	B	52.17	C
53.22	A	51.96	B	52.41	C
53.55	A	52.75	B	53.04	C
53.55	A	52.93	B	53.61	C
53.70	A	53.04	B	53.95	C
54.73	A	53.23	B	54.15	C
55.47	A	53.50	B	54.17	C
57.63	A	54.63	B	54.93	C
57.82	A	54.75	B	55.39	C
59.34	A	54.96	B	55.50	C
59.90	A	55.65	B	57.49	C
68.38	A	56.85	B	57.90	C

Pour chaque école, calculer et interpréter le coefficient d'asymétrie et d'aplatissement pour des données quantitatives