

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
 - Ne pas utiliser de correcteur.
 - Écrire le mot *FIN* à la fin de votre composition.
-

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

EXERCICE 1

Q1. Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et déterminer une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Q2. Application : On considère trois suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n + 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = -6u_n + 4v_n - 6w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n - 3w_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer Y_n en fonction de $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ et n .

À quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent-elles simultanément ? Expliciter alors ces suites.

EXERCICE 2

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n le groupe des permutations de l'ensemble $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Une permutation de S_n sera représentée en Python par une liste, dont l'élément d'indice i est l'image de i par cette permutation. Par exemple, la liste $[3, 1, 0, 2]$ représente la permutation $\sigma \in S_4$ définie par $\sigma(0) = 3, \sigma(1) = 1, \sigma(2) = 0$ et $\sigma(3) = 2$.

Dans tout l'exercice, on pourra utiliser librement les tests Python du type `x in L` (respectivement `x not in L`) permettant de vérifier si `x` est présent dans la liste `L` (respectivement de vérifier si `x` n'est pas présent dans la liste `L`).

Q3. Si `s` est une liste Python représentant une permutation de S_4 , quelle instruction Python permet de trouver l'image de 1 par cette permutation ?

Quelle liste Python représente la transposition $(2 \ 3) \in S_4$?

Q4. Écrire une fonction Python `comp(s1, s2)` prenant en entrée deux listes représentant des permutations σ_1 et σ_2 du même groupe de permutations et renvoyant la liste représentant la permutation $\sigma_1 \circ \sigma_2$.

Q5. Écrire une fonction Python `inv(s)` prenant en entrée une liste représentant une permutation σ et renvoyant la liste représentant σ^{-1} .

Q6. On souhaite tester si un sous-ensemble G de S_n est ou non un sous-groupe de S_n . Écrire une fonction Python `groupe(G)` prenant en entrée une liste de listes, où chaque sous-liste représente une permutation de S_n et renvoyant `True` s'il s'agit bien d'un sous-groupe de S_n , `False` sinon.

- Q7.** Écrire une fonction Python `cyclique(s)` prenant en entrée une liste s représentant une permutation σ de $\mathcal{S}_n$ et renvoyant le sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ engendré par σ sous la forme d'une liste de listes.

PROBLÈME

Le but de ce problème est de démontrer et utiliser plusieurs critères pour prouver qu'une matrice symétrique réelle est définie positive. On rappelle que, pour un entier naturel non nul n , une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *définie positive* si et seulement si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^T M X > 0.$$

- Q8.** Démontrer, en utilisant directement la définition précédente, que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est définie positive.

Caractérisation spectrale

- Q9.** Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle pour que celle-ci soit définie positive.

- Q10. Application :** Démontrer que le polynôme $P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3$ admet trois racines réelles distinctes (on ne cherchera pas à les déterminer).

Démontrer alors que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est définie positive grâce à la caractérisation spectrale.

Un critère en dimension 2

Dans cette partie, on souhaite démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si sa trace et son déterminant sont strictement positifs.

- Q11.** Démontrer qu'une matrice définie positive M de taille quelconque vérifie toujours $\text{Tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$.
- Q12.** Démontrer qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont la trace et le déterminant sont strictement positifs, est définie positive.
- Q13.** Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai pour les matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
- Q14. Application :** Utiliser le résultat précédent afin de démontrer que $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y + \frac{1}{xy}$ admet un extremum local. Préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local.