SÉRIE N° 2 : LES CARACTÉRISTIQUES DE TENDANCE CENTRALE
- CORRECTION –

Moyenne – Mode – Médiane - Quantiles

EXERCICE 1:

Notes
7
8
9
9
9
9
10
11
19

1. **Calcul de la moyenne :**
La moyenne arithmétique est donnée par :
$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$
$$\bar{x} = \frac{7+8+9+9+9+9+10+11+19}{9}$$
$$\bar{x} = \frac{91}{9} \approx 10.11$$
où x_i sont les notes et n est le nombre d'étudiants.

2. **Détermination de la médiane :**
La médiane est la valeur centrale lorsque les données sont classées par ordre croissant. Ici, la série ordonnée est : 7,8,9,9,**9**,9,10,11,19
La médiane est la 5e valeur (n est impair donc la position est (n+1)/2), soit 9.

3. **Mode (ou note modale)**
Le mode est la valeur la plus fréquente. Ici, la note **9** apparaît **4 fois**, c'est donc la **note modale**.

4. **Comparaison des mesures**
   - Moyenne : **10.11**
   - Médiane : **9**
   - Mode : **9**

   La moyenne est plus élevée que la médiane et le mode, probablement influencée par la note 19, qui est une valeur extrême.

5. **Analyse de la symétrie**
La distribution semble **asymétrique à droite** (asymétrie positive), car la moyenne est supérieure à la médiane et au mode. Cela indique qu'il y a une ou plusieurs valeurs élevées qui tirent la moyenne vers la droite.
6. **Détection d'une valeur aberrante**
La note **19** est significativement plus élevée que les autres. Elle semble être une valeur aberrante.
7. **Effet du retrait de la valeur aberrante sur la moyenne**
On recalcule la moyenne sans **19** :

Notes
7
8
9
9
9
9
10
11

$$\bar{x}_{\text{corrigée}} = \frac{7+8+9+9+9+9+10+11}{8}$$
$$\bar{x}_{\text{corrigée}} = \frac{72}{8} = 9$$

La moyenne passe de **10.11 à 9**, ce qui montre que la valeur aberrante influençait fortement la moyenne.

8. **Mesure la plus représentative**
   - La **médiane** et le **mode** valent **9**, ce qui reflète mieux la tendance centrale.
   - La moyenne initiale était biaisée par **19**.
     Donc, **la médiane ou le mode sont les plus représentatifs** de la performance des étudiants.
9. **Effet d'un ajout de 2 points :**

Notes+2
9
10
11
11
11
11
12
13
21

La nouvelle moyenne devient :

$$\bar{x} = \frac{(7+2)+(8+2)+(9+2)+...+(19+2)}{9} = \frac{(91+18)}{9} = \frac{109}{9} \approx 12.11$$

- La nouvelle médiane est **9 + 2 = 11**.
- Le nouveau mode est **9 + 2 = 11**.

Effet général : Ajouter une constante aux données augmente toutes les mesures (moyenne, médiane et mode) de cette même constante, sans modifier la forme de la distribution.

EXERCICE 2:

Nbr Pièces (Xi)	Nbr Appartements (ni)	Nicc	fi	ni xi
1	48	48	0.14	48
2	72	120	0.21	144
3	96	216	0.28	288
4	64	280	0.18	256
5	39	319	0.11	195
6	25	344	0.07	150
7	3	347	0.01	21
Total N=	**347**		**1**	

1. **Calcul du nombre moyen de pièces par appartement**
   La moyenne arithmétique se calcule comme suit :

$$\overline{x} = \frac{\sum(x_i \cdot n_i)}{N}$$

Calculons :

$$\sum(x_i \cdot n_i) = (1\cdot 48)+(2\cdot 72)+(3\cdot 96)+(4\cdot 64)+(5\cdot 39)+(6\cdot 25)+(7\cdot 3)$$

$$= 48+144+288+256+195+150+21 = 1102$$

$$\overline{x} = \frac{1102}{347} \approx 3.18$$

2. **Interprétation de la moyenne**
   La moyenne **3,18** indique que, en moyenne, un appartement dans cette localité a environ **3 pièces**. Cependant, la moyenne peut être influencée par les valeurs extrêmes (comme les appartements avec 6 ou 7 pièces). Il est donc important de vérifier si elle est représentative en la comparant à la médiane et au mode.

3. **Médiane du nombre de pièces**
   La médiane est la valeur qui sépare la distribution en deux parties égales. Pour la trouver, on utilise l'effectif cumulé croissant (Nicc).

Nbr Pièces (Xi)	Nbr Appartements (ni)	Nicc
1	48	48
2	72	120
3	96	216
4	64	280
5	39	319
6	25	344
7	3	347
Total N=	**347**	

N est un nombre impair, la médiane est la valeur correspondant à la position (N+1)/2=(347+1)/2=**174**.
D'après l'effectif cumulé croissant, la 174ème position se situe dans la catégorie **3 pièces**.
Donc la médiane est **3 pièces**

4. **Mode du nombre de pièces**
   Le mode est la valeur qui apparaît le plus fréquemment. Ici, la catégorie avec le plus grand effectif est **3 pièces** (ni=96).
   Le mode est **3 pièces**.

Nbr Pièces (Xi)	Nbr Appartements (ni)
1	48
2	72
3	96
4	64
5	39
6	25
7	3
Total N=	**347**

5. **Comparaison de la moyenne, de la médiane et du mode**
   - Moyenne ≈**3,18**
   - Médiane= **3**
   - Mode=**3**

   La moyenne est légèrement supérieure à la médiane et au mode, ce qui suggère une légère asymétrie à droite (présence de quelques appartements avec un nombre élevé de pièces).

6. **Conclusion sur la distribution**
   - La distribution est **légèrement asymétrique à droite** (asymétrie positive), car moyenne > médiane = mode.
   - Cela signifie qu'il y a quelques appartements avec un nombre de pièces plus élevé, ce qui tire la moyenne vers la droite.
7. **Ajout d'un appartement de 15 pièces**
   - Si on ajoute un appartement de 15 pièces, les nouvelles données sont :

Nbr Pièces (Xi)	Nbr Appartements (ni)	Nicc
1	48	48
2	72	120
3	96	216
4	64	280
5	39	319
6	25	344
7	3	347
15	1	348
Total N=	**348**	

Nouvelle moyenne ≈3.21
Nouvelle médiane =3
Nouveau mode : Le mode reste **3** pièces (car c'est toujours la valeur la plus fréquente).

8. **Interprétation des résultats après l'ajout**

- La moyenne passe de **3,18** à **3,21**, ce qui montre qu'elle est sensible aux valeurs extrêmes.
- La médiane et le mode restent inchangés, car l'appartement de 15 pièces est une valeur extrême qui n'affecte pas ces mesures.
- La distribution devient plus asymétrique à droite, car la moyenne s'éloigne davantage de la médiane et du mode.

EXERCICE 3:

Les données :

Salaires	Nbr salariés (ni)	Centre ci	Amplitude ai
[2000-3000[	10	2500	1000
[3000-5000[	100	4000	2000
[5000-6000[	60	5500	1000
[6000-8000[	20	7000	2000
[8000-10000[	10	9000	2000
	N=200		

1. **Salaire modal :**

Dans une distribution avec **des amplitudes inégales**, on utilise les effectifs corrigés (di) pour calculer le mode.

Salaires	Nbr salariés (ni)	Centre ci	Amplitude ai	Effectif corrigé (di)
[2000-3000[	10	2500	1000	10
[3000-5000[	100	4000	2000	50
[5000-6000[	60	5500	1000	60
[6000-8000[	20	7000	2000	10
[8000-10000[	10	9000	2000	5
	N=200			

Le **salaire modal** est la valeur qui apparaît le plus fréquemment dans la distribution. Dans ce cas, il correspond à la classe avec le plus grand effectif corrigé.

- La classe modale est **[5000-6000[** car elle a l'effectif corrigé le plus élevé **(d_3=60)**.
- La formule du mode dans une distribution continue est :

$$M_o = b_{i-1} + a_i \left[\frac{d_i - d_{i-1}}{(d_i - d_{i-1}) + (d_i - d_{i+1})}\right]$$

- ✓ b_{i-1}=5000 (borne inférieure de la classe modale)
- ✓ a_i=1000 (amplitude de la classe)
- ✓ d_i=60 (effectif corrigé de la classe modale)
- ✓ d_{i-1}=50 (effectif corrigé de la classe précédente)
- ✓ d_{i+1}=10 (effectif corrigé de la classe suivante)

Substituons les valeurs, on trouve : **Mo=5166.67 DH**

Interprétation :
Le **salaire modal est 5166.67 DH**, ce qui signifie que la classe la plus représentative du salaire typique est légèrement supérieure à 5000 DH

2. **Calcul du salaire moyen brut :**

$$\bar{X} = \frac{\sum(c_i \times n_i)}{N}$$

$$\sum(c_i \times n_i) = (2500 \times 10) + (4000 \times 100) + (5500 \times 60) + (7000 \times 20) + (9000 \times 10)$$

$$= 25000 + 400000 + 330000 + 140000 + 90000$$

$$= 985000$$

$$\bar{X} = \frac{985000}{200} = 4925DH$$

Interprétation de la différence avec le mode :

- Le **salaire moyen** (4925 DH) est **inférieur** au **salaire modal** (environ **5166.67**).
- Cela signifie que la distribution des salaires est **asymétrique**, avec probablement des **salaires faibles qui tirent la moyenne vers le bas**.

3. **Estimation du salaire médian avec la formule empirique**

Médiane ≈ (Mode + 2 × Moyenne) / 3

Substituons les valeurs, on trouve : **Mé= 5005.56 DH**

4. **Calcul exact du salaire médian :**
Nous allons utiliser **Nicc** pour déterminer la classe médiane

Salaires	Nbr salariés (ni)	Nicc
[2000-3000[	10	10
[3000-5000[	100	110
[5000-6000[	60	170
[6000-8000[	20	190
[8000-10000[	10	200
	N=200	

- N/2=200/2=100.
- La première classe dépassant 100 est **[3000-5000[** donc la **Classe médiane : [3000-5000[**
- La formule de la médiane est :

$$M\acute{e} = b_{i-1} + a_i \left(\frac{\frac{n}{2} - N_{i-1}^{+}}{n_i} \right)$$

Appliquons la formule

- ✓ b_{i-1}=3000 (borne inférieure de la classe médiane)
- ✓ a_i=2000 (amplitude de la classe)
- ✓ N_{i-1}^{+}=10 (effectif cumulé croissant de la classe précédente)
- ✓ n_i=100 (effectif de la classe médiane)

Substituons les valeurs, on trouve : **Mé=4800 DH**

5. **Comparaison avec l'estimation empirique**
Médiane exacte : **4800** DH
Médiane estimée : **5005.56** DH
L'estimation surestime légèrement la médiane.

6. **Calcul du salaire net moyen**
Le salaire net est obtenu en soustrayant les impôts du salaire brut.
Chaque salarié paie :
- 30% d'impôt proportionnel
- 500 DH d'impôt forfaitaire

$$X_{\text{net}} = X_{\text{brut}} - 0.3X_{\text{brut}} - 500$$
$$= 0.7X_{\text{brut}} - 500$$
$$\bar{X}_{\text{net}} = 0.7 \times 4925 - 500$$
$$= 3447.5 - 500$$
$$= 2947.5DH$$

7. **Différence relative entre le salaire brut et le salaire net**

$$\text{Différence relative} = \frac{\bar{X}_{\text{brut}} - \bar{X}_{\text{net}}}{\bar{X}_{\text{brut}}} \times 100$$
$$= \frac{4925 - 2947.5}{4925} \times 100$$
$$= \frac{1977.5}{4925} \times 100$$
$$\approx 40.16\%$$

L'impôt réduit le salaire brut moyen de 40.16%. Cela signifie qu'un salarié **perd en moyenne 40.16% de son salaire brut en impôts**

EXERCICE 4:

	Nombre	Nombre de pièces par jour/Ouvrier
Ouvriers anciens	2	20
Ouvriers jeunes	3	14

1. **Nombre total de pièces produites par jour**
- **Ouvriers anciens** : 2 ouvriers × 20 pièces = **40 pièces/jour**
- **Ouvriers jeunes** : 3 ouvriers × 14 pièces = **42 pièces/jour**

Total=40+42=**82 pièces/jour**

2. **Vitesse moyenne de fabrication par ouvrier :**

La vitesse moyenne est obtenue en divisant la production totale par le nombre total d'ouvriers :

$$V_{\text{moy}} = \frac{\text{Total des pièces}}{\text{Total des ouvriers}}$$
$$= \frac{82}{5}$$
$$= 16.4 \text{ pièces/ouvrier/jour}$$

3. **Ajout d'un ouvrier jeune**

	Nombre	Nombre de pièces par jour/Ouvrier
Ouvriers anciens	2	20
Ouvriers jeunes	4	14

- Production supplémentaire : **1 ouvrier × 14 pièces = 14 pièces/jour**
- Nouvelle production totale : **82 + 14 = 96 pièces/jour**
- Nouveau nombre d'ouvriers : **6**

$$V_{\text{moy}} = \frac{96}{6} = 16 \text{ pièces/ouvrier/jour}$$

L'ajout d'un ouvrier jeune réduit la vitesse moyenne de 16.4 à 16 pièces/jour.

4. **Ajout d'un ouvrier ancien à la place**

	Nombre	Nombre de pièces par jour/Ouvrier
Ouvriers anciens	3	20
Ouvriers jeunes	3	14

- Production supplémentaire : **1 ouvrier × 20 pièces = 20 pièces/jour**
- Nouvelle production totale : **82 + 20 = 102 pièces/jour**
- Nouveau nombre d'ouvriers : **6**

$$V_{\text{moy}} = \frac{102}{6} = 17 \text{ pièces/ouvrier/jour}$$

L'ajout d'un ouvrier ancien augmente la vitesse moyenne à 17 pièces/jour.

5. **Formation des ouvriers jeunes (14 → 18 pièces/jour)**

	Nombre	Nombre de pièces par jour/Ouvrier
Ouvriers anciens	2	20
Ouvriers jeunes	3	18

- **Nouvelle production des ouvriers jeunes** : 3 ouvriers × 18 pièces = **54 pièces/jour**
- **Production totale** : Ouvriers anciens (40) + Ouvriers jeunes (54) = **94 pièces/jour**
- **Nombre total d'ouvriers** : 5

$$V_{\text{moy}} = \frac{94}{5} = 18.8 \text{ pièces/ouvrier/jour}$$

La formation augmente la vitesse moyenne à 18.8 pièces/jour.

6. **Embauche vs. Formation : Quelle est la meilleure option ?**

Scénario 1 : Ajouter un ouvrier jeune

- Nouvelle vitesse moyenne : **16 pièces/ouvrier/jour**

Scénario 2 : Ajouter un ouvrier ancien

- Nouvelle vitesse moyenne : **17 pièces/ouvrier/jour**

Scénario 3 : Former les ouvriers jeunes

- Nouvelle vitesse moyenne : **18.8 pièces/ouvrier/jour**

Conclusion :

Former les ouvriers **jeunes** est plus efficace que d'embaucher un nouvel ouvrier, car **la productivité moyenne augmente davantage (18.8 contre 16 ou 17)**.

De plus, **la formation améliore la productivité sans augmenter la masse salariale**, ce qui est un atout économique pour l'atelier.