

chap6 : Les caractéristiques de concentration



Prof: Abdelali ZBAKH <a.zbakh@uae.ac.ma>

chap6 : Les caractéristiques de concentration

Les caractères de concentration

- La mesure de la concentration revient à celle de la conséquence de dispersion. Très importante en économie (concentration des salaires, des revenus, de la taille des entreprises...) elle concerne des variables continues ne pouvant prendre que des valeurs positives.
- L'**objectif** est de mesurer les **inégalités** dans la **répartition** d'une variable à l'intérieur d'une population.
- Il existe deux méthodes de détermination de concentration:
 - ✓ par calcul;
 - ✓ par les graphes.
- Caractéristiques de concentration :
 - ✓ Médiale
 - ✓ Courbe de Lorentz
 - ✓ Indice de Gini

chap6 : Les caractéristiques de concentration

Détermination analytique de la concentration: Valeurs globales

Considérons une série statistique comportant n observations dans un tableau statistique $(x_i; n_i)$, présentant k modalités, on appelle :

- ✓ **Masse** associée à la modalité x_i d'effectif n_i la quantité définie par:

$$\text{masse} = n_i x_i$$

- ✓ **Masse totale:**

$$S = \sum_{i=1}^k n_i x_i$$

- ✓ **Masse relative** associée à la modalité x_i la quantité définie par:

$$q_i = \frac{n_i x_i}{S}$$



chap6 : Les caractéristiques de concentration

Détermination analytique de la concentration: Valeurs globales

Exemple: Données discrètes groupées.

Pour la distribution suivante d'une population de 16 familles selon le nombre d'enfants

Nombre d'enfants par famille x_i	Nombre de famille n_i	masse $n_i x_i$	Fréquence des masses du caractère (q_i en %)	Fréquence cumulée croissante des masses du caractère (q_i cc en %)
0	1	0	0.00	0.00
1	3	3	9.68	9.68
2	8	16	51.61	61.29
3	4	12	38.71	100.00
Total	16	31	100	-

Masse totale

chap6 : Les caractéristiques de concentration

Détermination analytique de la concentration: Valeurs globales

$$\text{masse} = n_i C_i$$

Exemple: Données groupées en classes

$$\text{Masse totale: } S = \sum_{i=1}^k n_i C_i$$

Taille (en m)	n_i	C_i	masse $n_i C_i$	Fréquence des masses du caractère (q_i en %)	Fréquence cumulée croissante des masses du caractère (q_i cc en %)
[1,50 ; 1,60[	6	1.55	9.3	22.96	22.96
[1,60 ; 1,70[	7	1.65	11.55	28.52	51.48
[1,70 ; 1,80[	8	1.75	14	34.57	86.05
[1,80 ; 1,90[	2	1.85	3.7	9.14	95.19
[1,90 ; 2[	1	1.95	1.95	4.81	100.00
Total	24	--	40.5	100.00	--

Masse totale

chap6 : Les caractéristiques de concentration

Détermination analytique de la concentration: La Médiale

- La **Médiale** est la valeur du caractère qui partage en deux parties égales la **masse totale** du caractère ($n_i x_i$). La **Médiale** est notée **MI**
- La **médiale** d'une série ($x_i; n_i$) est la **médiane** de la série ($x_i, n_i x_i$).

Remarques :

- La masse relative q_i de la série ($x_i, n_i x_i$) joue le rôle de la fréquence f_i dans la série (x_i, n_i)
- Pour calculer la **Médiale**, on applique la même formule que la **médiane** mais appliquée aux données $n_i x_i$ ou q_i .



chap6 : Les caractéristiques de concentration

Détermination analytique de la concentration: La Médiale

Exemple: Données discrètes groupées.

Nombre d'enfants par famille x_i	Nombre de famille n_i	masse $n_i x_i$	masse CC
0	1	0	0
1	3	3	3
2	8	16	19
3	4	12	31
Total	16	31	

$S=31$ est impair, La **médiale** est la valeur qui occupe le $\frac{31+1}{2}=16$ rang de la série ordonnée (x_i, n_i) .

La médiale est alors égale à 2.

Exemple: Données groupées en classes

Taille (en m)	n_i	C_i	masse $n_i C_i$	Fréquence des masses du caractère (q_i en %)	Fréquence cumulée croissante des masses du caractère (q_i cc en %)
[1,50 ; 1,60[	6	1.55	9.3	22.96	22.96
[1,60 ; 1,70[	7	1.65	11.55	28.52	51.48
[1,70 ; 1,80[	8	1.75	14	34.57	86.05
[1,80 ; 1,90[	2	1.85	3.7	9.14	95.19
[1,90 ; 2[	1	1.95	1.95	4.81	100.00
Total	24	--	40.5	100.00	--

- La **classe médiale** $[a,b]$ est celle dont la **q_i cc (b)** est $\geq 50\%$ (ou masse cumulée $M_{cc}(b)$ est $\geq S/2$) et dont la classe précédente a une q_i cc (a) $< 50\%$ (ou masse cumulée $M_{cc}(a)$ est $< S/2$).
- La médiale est calculée par la formule:

$$MI = a + \frac{(50 - q_{icc}(a))}{q_{icc}(b) - q_{icc}(a)} \times (b - a)$$

$$MI = a + \frac{(S/2 - M_{cc}(a))}{M_{cc}(b) - M_{cc}(a)} \times (b - a)$$

- la classe médiale est $[1,60 ; 1,70[$, MI appartient à $[1,60 ; 1,70[$

$$MI = 1,60 + \frac{(50 - 22.96)}{51.48 - 22.96} \times (1,70 - 1,60) = 1,6948 \text{ m}$$

Interprétation : La moitié de la taille totale des 24 étudiants est réalisée par les étudiants dont la taille est inférieure à 1,6948 m.

chap6 : Les caractéristiques de concentration

Application 1: (A faire)

- Déterminer la médiale graphiquement, en utilisant la courbe des fréquences cumulées des masses q_i cc .

Taille (en m)	n_i	C_i	masse $n_i C_i$	Fréquence des masses du caractère (q_i en %)	Fréquence cumulée croissante des masses du caractère (q_i cc en %)
[1,50 ; 1,60[	6	1.55	9.3	22.96	22.96
[1,60 ; 1,70[	7	1.65	11.55	28.52	51.48
[1,70 ; 1,80[	8	1.75	14	34.57	86.05
[1,80 ; 1,90[	2	1.85	3.7	9.14	95.19
[1,90 ; 2[	1	1.95	1.95	4.81	100.00
Total	24	--	40.5	100.00	--

chap6 : Les caractéristiques de concentration

Détermination analytique de la concentration:

Une mesure de la concentration :

$$C = \frac{\Delta M}{\text{l'étendue}}$$

Avec

- $\Delta M = MI - Me$: est l'écart médiale-médiane

- Si $C = 0$ alors la concentration est **nulle**.
- Si $C=1$ alors la concentration est **maximale**

chap6 : Les caractéristiques de concentration

Détermination analytique de la concentration:

Exemple:

<i>salaires</i>	n_i	$x_i=C_i$	$n_{i\ cc}$	<i>masse $n_i x_i$</i>	<i>masse cc</i>
[10 – 15[	9	12,5	9	112,5	112,5
[15 – 20[	25	17,5	34	437,5	550
[20 – 25[	32	22,5	66	720	1270
[25 – 30[	16	27,5	82	440	1710
TOTAL	82			1710	

Colonne $n_{i\ cc}$:

$k = 82/2 = 41$ donc **la classe médiane** est **[20 ; 25[**

On applique la formule de calcul de la médiane :

$$Me = 20 + \frac{(41 - 34)}{66 - 34} \times (25 - 20) = 21,09$$

Colonne *masse cc*

$k = 1710/2 = 855$ donc **la classe médiale** est **[20 ; 25[**

On applique la formule de calcul de la médiale :

$$MI = 20 + \frac{(855 - 550)}{1270 - 550} \times (25 - 20) = 22,12$$

La mesure de la concentration: $C = \frac{\Delta M}{Etendue} = \frac{22,12 - 21,09}{30 - 10} = 0.0515 < 1$, donc **la concentration est faible**

chap6 : Les caractéristiques de concentration

Détermination géométrique de la concentration : la courbe de concentration

Détermination graphique de la concentration:

- Il existe un moyen visuel de déterminer la concentration sans passer par la comparaison de (médiane, médiale).
- Il suffit de confronter les deux fonctions cumulatives sur un graphique, appelé : (courbe de **Lorentz** ou courbe de **Gini** ou courbe de **Gini-Lorentz**)

Méthode de construction :

- Pour tracer la courbe de Gini-Lorenz on met :
 - ✓ Sur l'axe des abscisses la fréquence cumulée ($f_{i\ cc}$) de la série $(x_i; n_i)$;
 - ✓ Sur l'axe des ordonnées la fréquence cumulée ($q_{i\ cc}$) de la série $(x_i; n_i \times x_i)$;
 - ✓ On trace la droite passant par l'origine d'équation $q_{i\ cc} = f_{i\ cc}$.

chap6 : Les caractéristiques de concentration

La courbe de Gini-Lorenz

- La série suivante indique la répartition des 22 régions françaises selon le nombre de lits dont elles disposent en maisons de retraite au 1 Janvier 2005 :

Nombre de lits	n_i	$x_i = C_i$	f_i	f_{icc}	masse $n_i x_i$	q_i (%)	q_{icc}
[0 ; 12 250[	4	6 125	18,18%	18,18%	24 500	5,41%	5,41%
[12 250 ; 24 500[	12	18 375	54,55%	72,73%	220 500	48,65%	54,05%
[24 500 ; 36 750[	4	30 625	18,18%	90,91%	122 500	27,03%	81,08%
[36 750 ; 49 000[	2	42 875	9,09%	100,00%	85 750	18,92%	100,00%
Total	22		100,00%		453 250	100,00%	

Calcul de la médiale : la classe médiale c'est [12 250 ; 24 500[On trouve **MI= 23 479,17 lits**

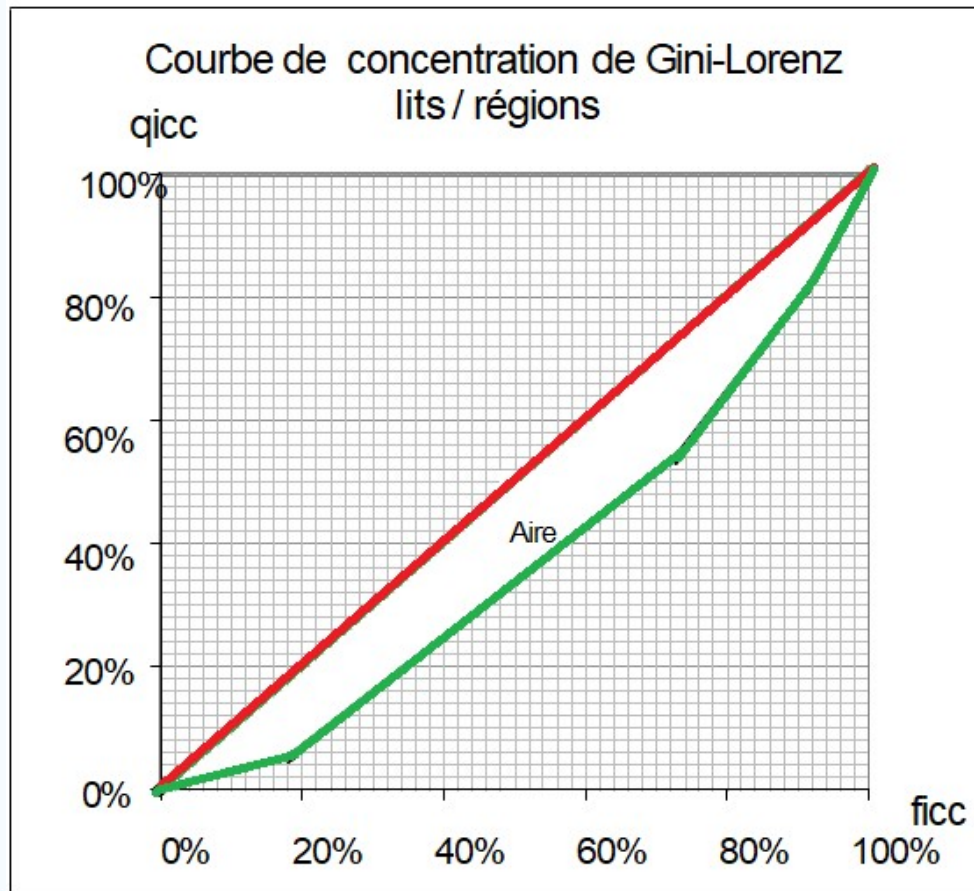
Ce qui signifie que 50% des lits disponibles en maisons de retraite françaises proviennent de régions qui ont moins de 23 479,17 lits.

Pour construire la courbe de Gini-Lorenz on place les points de coordonnées :

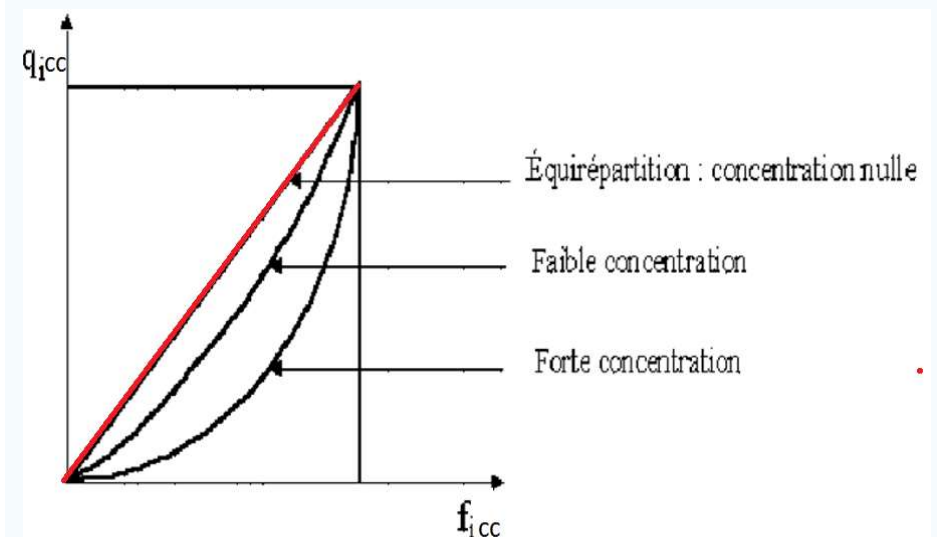
(18,18 ; 5,41) - (72,73 ; 54,05) - (90,91 ; 81,08) - (100 ; 100)

chap6 : Les caractéristiques de concentration

La courbe de Gini-Lorenz



- La courbe de Lorenz illustre la répartition de la richesse dans une société.
- Plus cette courbe est éloignée de la bissectrice, plus les inégalités sont fortes.
- Le coefficient de Gini mesure les inégalités au sein d'une société.



chap6 : Les caractéristiques de concentration

La courbe de Gini-Lorenz: L'indice de Gini

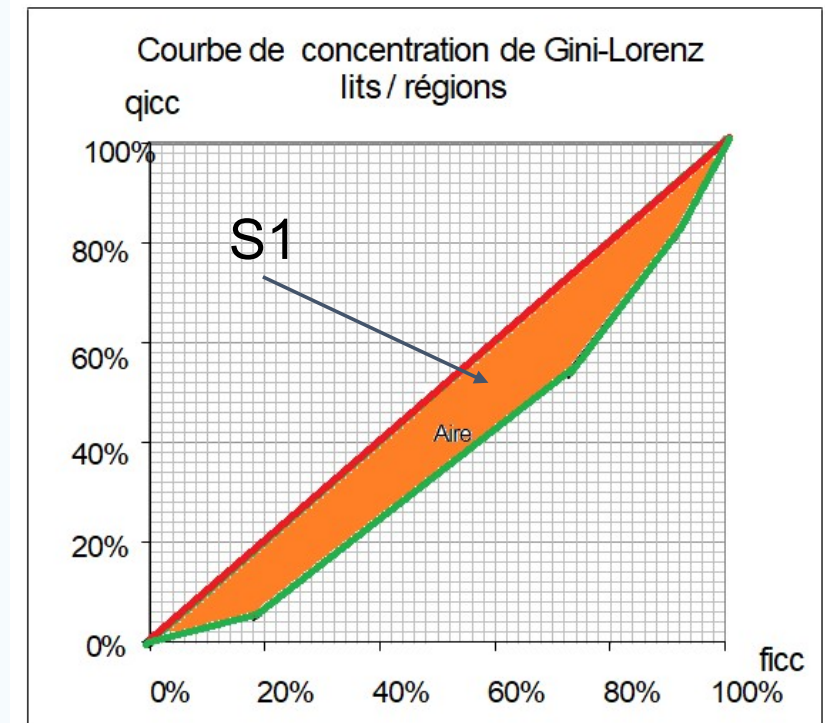
- L'indice de GINI est une mesure de l'indice de concentration à partir de la courbe de Gini-Lorenz. Il est donné par la formule :

$$G = 2 \times S1$$

- où **S1** est l'aire comprise entre la courbe de concentration et la diagonale.

Propriétés de l'indice de Gini

- On a toujours $0 < G < 1$;
- G proche de 1 $\Rightarrow$ forte concentration (plus la société est inégalitaire) ;
- G proche de 0 $\Rightarrow$ faible concentration.

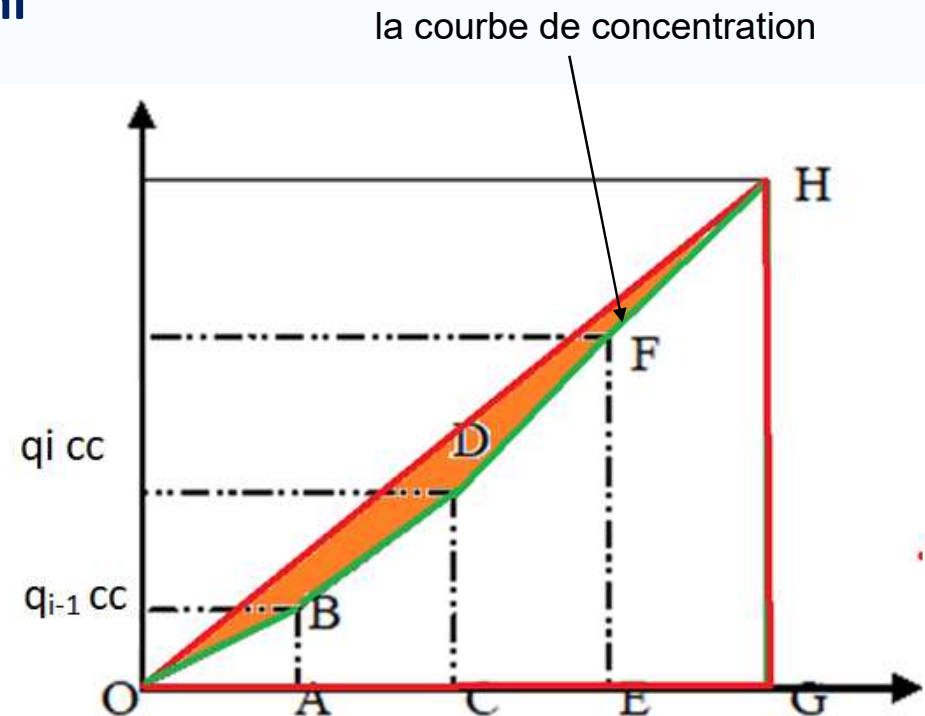


chap6 : Les caractéristiques de concentration

La courbe de Gini-Lorenz: L'indice de Gini

Calcul de l'indice de Gini : **Méthode des Trapèzes**

- l'aire comprise entre la courbe de concentration et l'axe des abscisses peut être divisée en autant de trapèzes qu'il y a de modalités.
- Sur ce graphique peuvent être mis en évidence 4 trapèzes successivement (OAB), (ACDB), (CEFD), (EGHF).



chap6 : Les caractéristiques de concentration

La courbe de Gini-Lorenz: L'indice de Gini

Calcul de l'indice de Gini : **Méthode des Trapèzes**

On note :

- $S1$ = l'Aire de concentration.
- $S2$ = Aire du triangle $OGH = \frac{1 \times 1}{2}$
- $S3 = \sum$ des surfaces des trapèzes

$$S2 = S3 + S1$$

$$S1 = S2 - S3$$

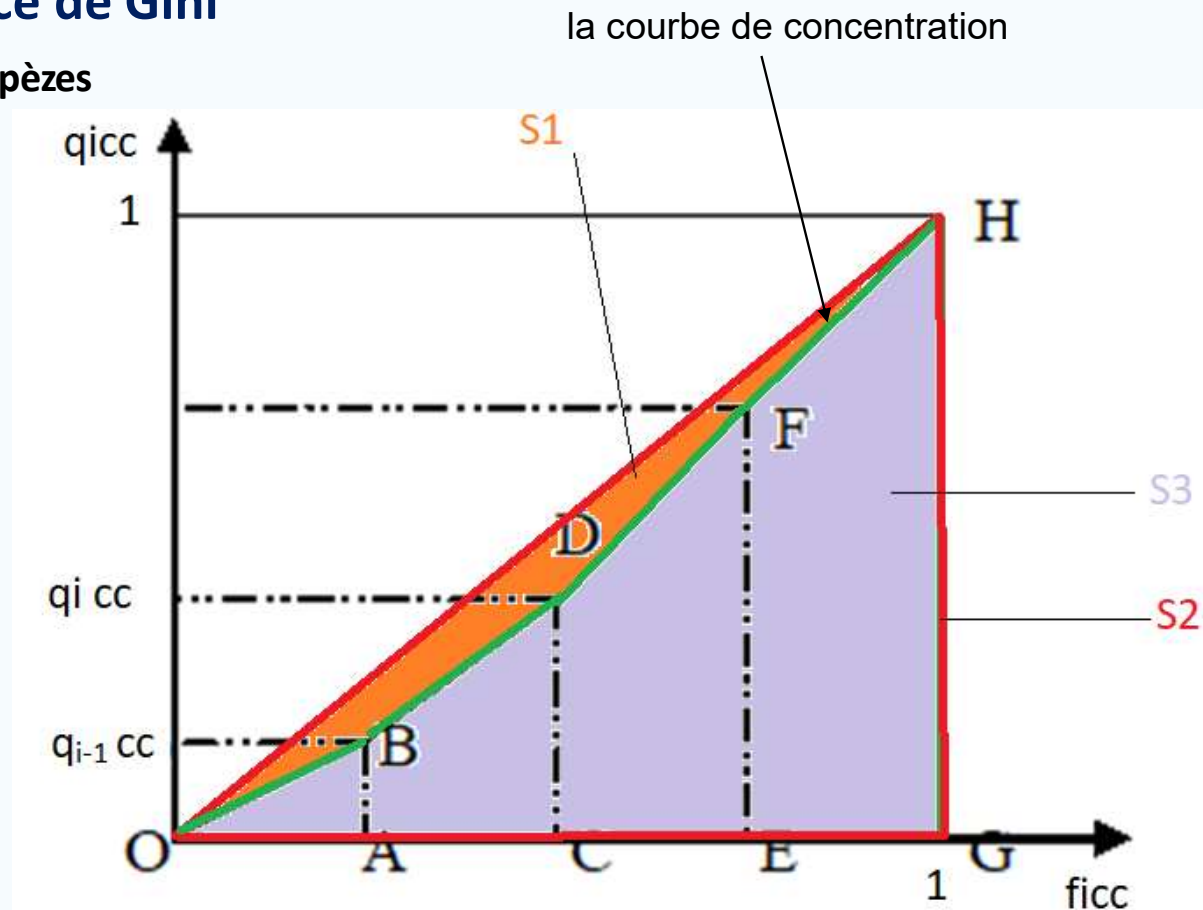
$$S1 = \frac{1}{2} - S3$$

L'indice de GINI;

$$G = 2 \times S1$$

$$G = 2 \times \left(\frac{1}{2} - S3 \right)$$

$$G = 1 - 2 \times S3$$



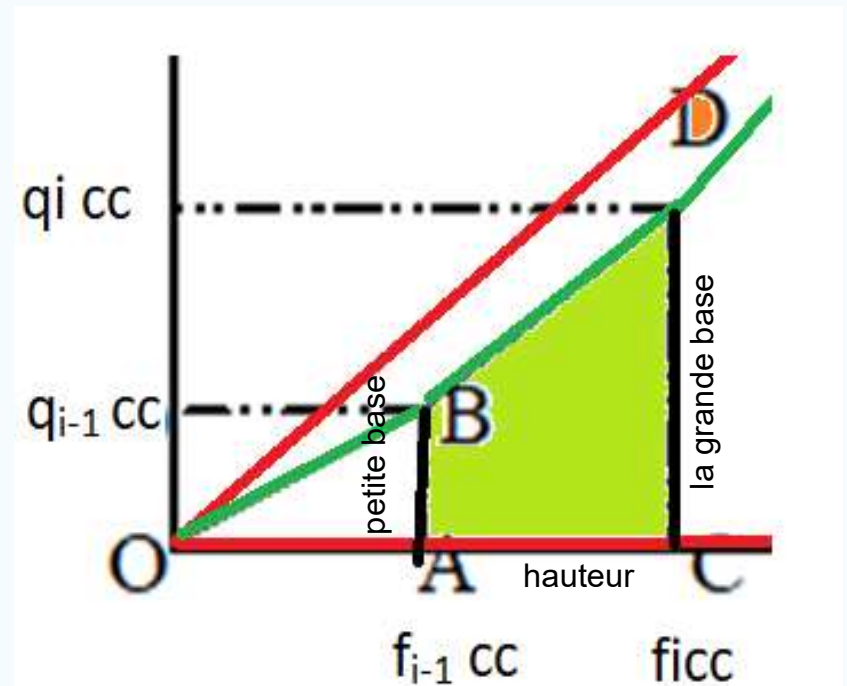
chap6 : Les caractéristiques de concentration

La courbe de Gini-Lorenz: L'indice de Gini

Calcul de l'indice de Gini : Méthode des Trapèzes

$$\begin{aligned}
 \text{Aire trapèze} &= \frac{(\text{la grande base} + \text{la petite base}) \times \text{hauteur}}{2} \\
 &= \frac{(q_i \text{cc} + q_{i-1} \text{cc}) \times (f_{i \text{cc}} - f_{i-1} \text{cc})}{2} \\
 &= \frac{(q_{i \text{cc}} + q_{i-1} \text{cc}) \times f_i}{2}
 \end{aligned}$$

avec $f_{i \text{cc}} = f_i + f_{i-1} \text{cc}$



chap6 : Les caractéristiques de concentration

La courbe de Gini-Lorenz: L'indice de Gini

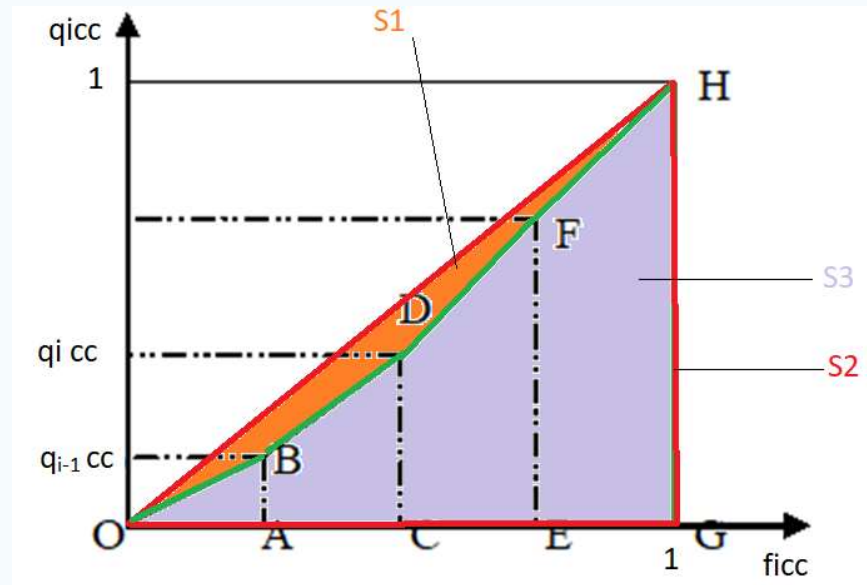
Calcul de l'indice de Gini : **Méthode des Trapèzes**

Aire de tous les trapèzes :

$$S3 = \sum \frac{(q_{icc} + q_{i-1,cc}) \times f_i}{2}$$

L'indice de GINI:

$$\begin{aligned} G &= 1 - 2 \times S3 = 1 - 2 \times \sum f_i \times (q_{i-1,cc} + q_{i,cc}) / 2 \\ &= 1 - \sum f_i \times (q_{i-1,cc} + q_{i,cc}) \end{aligned}$$



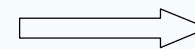
chap6 : Les caractéristiques de concentration

La courbe de Gini-Lorenz: L'indice de Gini

- Exemple : calculer l'indice de Gini

x_i	n_i	c_i	a_i	$n_i \times c_i$	Nicc	f_i	Ficc	q_i	q_{icc}	$s_i = q_{i-1}cc + q_i cc$	$s_i \times f_i$
[1000;1250[	24	1125	250	27000	24	0.285714286	0.2857	0.237885463	0.237885463	0.237885463	0.06796728
[1250;1500[	47	1375	250	64625	47	0.55952381	0.8452	0.56938326	0.807268722	1.045154185	0.58478865
[1500;1750[	10	1625	250	16250	10	0.119047619	0.9643	0.143171806	0.950440529	1.757709251	0.2092511
[1750;2000[	3	1875	250	5625	3	0.035714286	1	0.049559471	1	1.950440529	0.06965859
somme	84			113500	84	1		1			0.93166562

L'indice de Gini est = $1 - 0.93166562 = 0.068334$



La concentration est faible

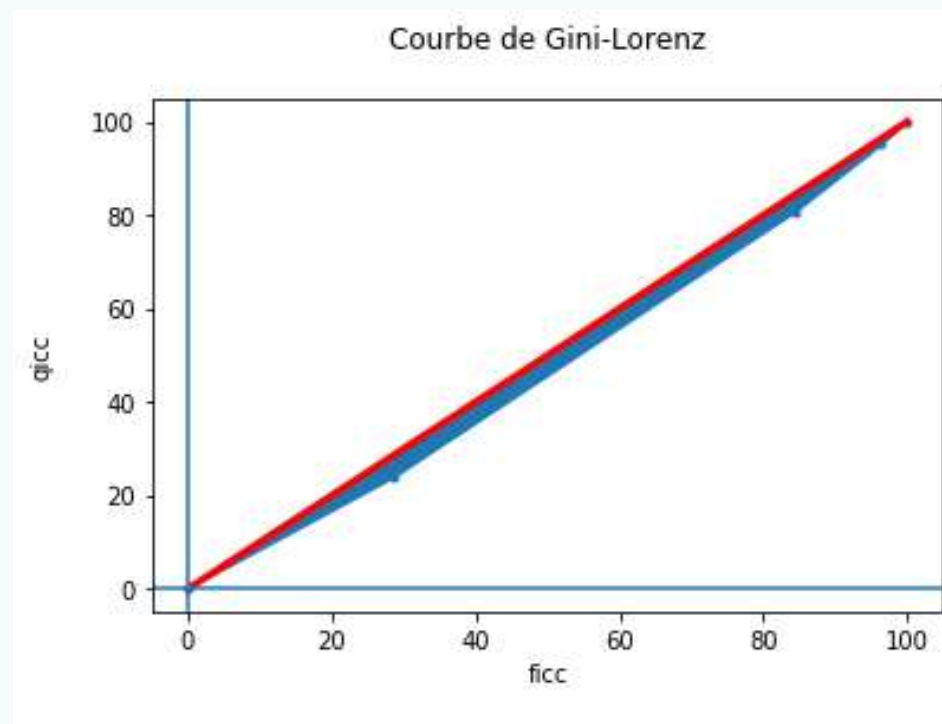
chap6 : Les caractéristiques de concentration

La courbe de Gini-Lorenz: L'indice de Gini

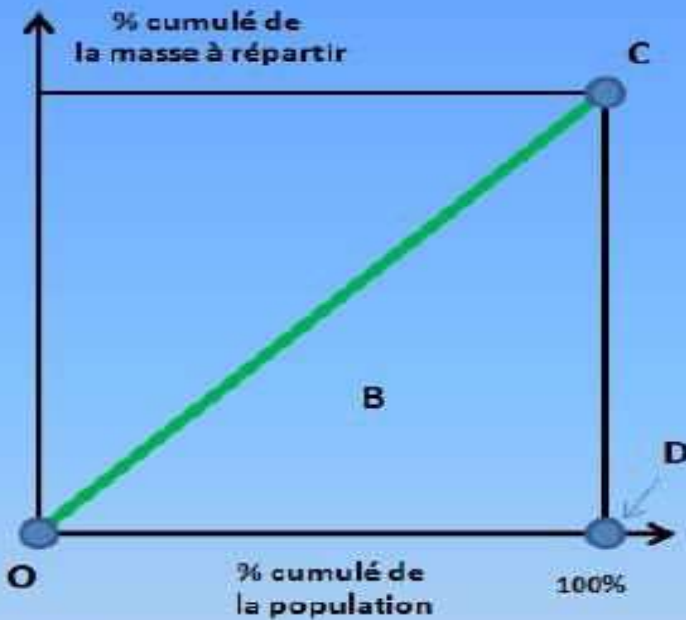
Exemple : calculer l'indice de Gini

L'indice de Gini est = $1 - 0.93166562 = 0.068334$ $\Rightarrow$

La concentration est faible

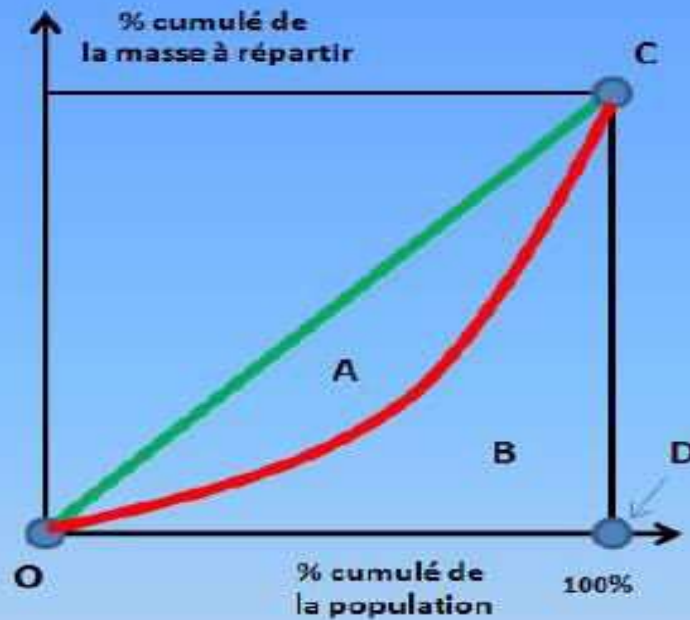


Cas numéro 1



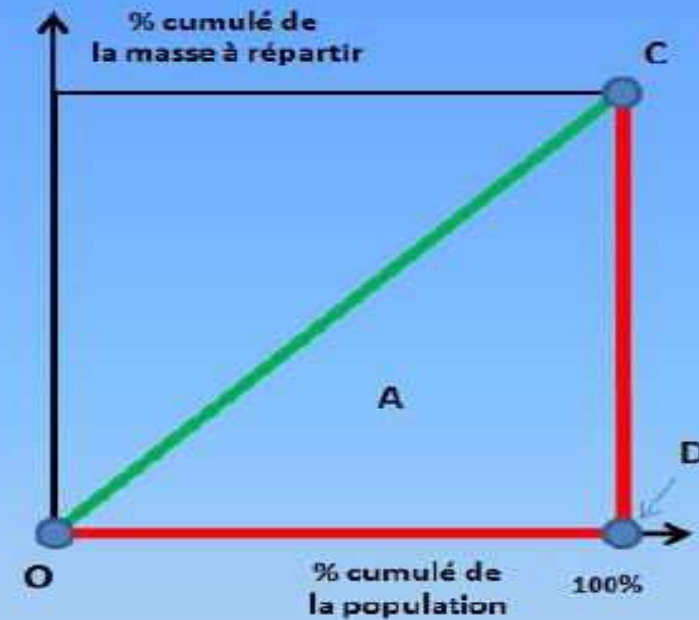
Égalité parfaite : la courbe de LORENZ se confond avec la droite OC d'égalité parfaite. Chaque individu de la population possède la même part de la masse totale

Cas numéro 2



Inégalité modérée : la courbe de LORENZ partage le triangle OCD est deux surfaces. Plus la surface A augmente aux dépens de la surface B et plus l'inégalité augmente

Cas numéro 3



Inégalité totale : la courbe de LORENZ est donnée OCD. La surface A occupe tout le triangle OCD et la surface B a disparu. C'est le cas théorique où un seul individu possède 100% de la masse totale et les autres rien.

Fin du programme Merci