SÉRIE N° 4 : LES CARACTÉRISTIQUES DE FORME ET DE CONCENTRATION
- CORRECTION –

L'asymétrie - L'aplatissement - L'indice de concentration

EXERCICE 1 :

$$m_1 = 12 \; ; \mu_2 = 9 \; ; \mu_3 = -5 \; ; \mu_4 = 8$$

1. **Calcul du coefficient de variation**
   Le coefficient de variation (CV) est défini comme :

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

où :

- $\bar{x} = m_1 = 12$ (moyenne),
- $\sigma^2 = \mu_2 = 9$ (variance),
- $\sigma = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{9} = 3$ (écart-type).

Donc, **CV=(3/12)×100=25%**

2. **Interprétation du Coefficient de Variation (CV)**
   Un **CV de 25%** signifie que **l'écart-type représente 25% de la moyenne**.
   Cela indique que **les valeurs de la distribution sont modérément dispersées autour de la moyenne**. Donc la distribution **n'est ni trop concentrée ni trop étalée**.

   Rappel :

   - ✓ **CV < 15%** → Faible dispersion
   - ✓ **15% ≤ CV ≤ 30%** → Dispersion modérée
   - ✓ **CV > 30%** → Forte dispersion

3. **Spécification de la forme de la distribution**
   - **L'asymétrie est donnée par :**

$$CF = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}}$$

Avec $\mu_3=-5$ et $\sigma^3=3^3=27$
Donc CF=-5/27**=−0.185**
La distribution est légèrement asymétrique à gauche (asymétrie négative).

   - **L'aplatissement est donné par :**

$$CF = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

Avec $\mu_4=8$ et $\sigma^4=3^4=81$
Donc CF=(8/81)-3=**−2.901**
La distribution est très platykurtique (moins concentrée autour de la moyenne que la loi normale.).

EXERCICE 2:

• **Distribution A** : Moyenne = 50, Écart-type = 10, Asymétrie CY= 0, Aplatissement CP= 3
• **Distribution B** : Moyenne = 50, Écart-type = 10, Asymétrie CY= 0.8, Aplatissement CP= 5

1. **Principale différence entre les deux distributions**
   Les deux distributions ont la **même moyenne (50)** et le **même écart-type (10)**, ce qui signifie qu'elles ont la même dispersion autour de la moyenne. Cependant, elles diffèrent en termes de **forme** :
   - **Distribution A :**
     - ✓ Asymétrie (CY) = 0 → Symétrique (distribution normale).
     - ✓ Aplatissement (CP) = 3 → Distribution mésocurtique (comme une loi normale).
   - **Distribution B :**
     - ✓ Asymétrie (CY) = 0.8 → Distribution **asymétrique à droite** (queue plus longue du côté des grandes valeurs).
     - ✓ Aplatissement (CP) = 5 → Distribution **leptocurtique** (moins plate que la loi Normale)).

   Différence clé :
   - **A** est **symétrique** et suit une forme proche de la normale.
   - **B** est **asymétrique à droite** et a **des queues plus épaisses**, ce qui signifie plus de valeurs extrêmes.
2. **Dans quelle distribution la probabilité d'observer des valeurs extrêmes est-elle plus forte ?**
   La probabilité d'observer des valeurs extrêmes est plus forte dans **la distribution B** pour deux raisons :
   - **Asymétrie (CY=0.8)** → La queue droite est plus longue, donc il y a plus de valeurs élevées.
   - **Aplatissement (CP=5)** → Une distribution leptocurtique a **des queues plus épaisses**, ce qui signifie que les valeurs extrêmes sont plus fréquentes.

   Conclusion : La distribution B présente une probabilité plus élevée d'observer des valeurs extrêmes, notamment des valeurs très élevées.

EXERCICE 3:

Prix	Le nombre d'article (ni)
[0,4[	6
[4 ,8[	25
[8,12[	n3
[12,e4[	17
[e4,22[	14
[22,30[	11
[30,42[	3
Total	100

1. **Calcul de n_3**
   On sait que le total des articles est 100, donc :
   $$6+25+\mathbf{n3}+17+14+11+3=100$$
   $$n3=100-(6+25+17+14+11+3)=100-76=24$$
2. **Démontrer que e4=16 sachant que le prix moyen est 13**
   Le prix moyen est donné par :
   $$\bar{X} = \frac{\sum(c_i \cdot n_i)}{N}$$

   où :
   - c_i est le centre de la classe
   - n_i est le nombre d'articles dans la classe,
   - N=100

Intervalle	c_i	n_i	$c_i \cdot n_i$
[0,4[	$\frac{0+4}{2} = 2$	6	$2 \times 6 = 12$
[4,8[	$\frac{4+8}{2} = 6$	25	$6 \times 25 = 150$
[8,12[	$\frac{8+12}{2} = 10$	24	$10 \times 24 = 240$
[12,e4[	$\frac{12+e4}{2}$	17	$17 \times \frac{12+e4}{2}$
[e4,22[	$\frac{e4+22}{2}$	14	$14 \times \frac{e4+22}{2}$
[22,30[	$\frac{22+30}{2} = 26$	11	$26 \times 11 = 286$
[30,42[	$\frac{30+42}{2} = 36$	3	$36 \times 3 = 108$

En remplaçant dans la formule du prix moyen :

$$\frac{12 + 150 + 240 + 17 \times \frac{12+e4}{2} + 14 \times \frac{e4+22}{2} + 286 + 108}{100} = 13$$

$$12 + 150 + 240 + 8.5(12 + e4) + 7(e4 + 22) + 286 + 108 = 1300$$

$$12 + 150 + 240 + 8.5 \times 12 + 8.5e4 + 7e4 + 7 \times 22 + 286 + 108 = 1300$$

$$12 + 150 + 240 + 102 + 8.5e4 + 7e4 + 154 + 286 + 108 = 1300$$

$$1052 + 15.5e4 = 1300$$

$$15.5e4 = 248$$

$$e4 = 16$$

3. Calcul de la médiale

Prix	Le nombre d'article (ni)	Ci
[0,4[	6	2
[4 ,8[	25	6
[8,12[	24	10
[12,16[	17	14
[16,22[	14	19
[22,30[	11	26
[30,42[	3	36
Total N=	**100**	

La **médiale** (ou prix de vente médial) est la valeur qui divise la somme des prix en deux parties égales. Elle est différente de la médiane, qui divise les observations en deux groupes égaux.

Étapes de calcul :

- On doit d'abord calculer la moitié du chiffre d'affaires total.
- Ensuite, on détermine dans quelle classe de prix cette valeur se situe.
- Enfin, on applique la formule de la médiale pour trouver la valeur précise.

Calcul du chiffre d'affaires total

Le chiffre d'affaires est donné par :

$$CA = \sum (c_i \times n_i)$$

Prix	Le nombre d'article (ni)	Ci	m=ni x ci	Ni(m)cc
[0,4[	6	2	12	12
[4 ,8[	25	6	150	162
[8,12[	24	10	240	402
[12,16[	17	14	238	640
[16,22[	14	19	266	906
[22,30[	11	26	286	1192
[30,42[	3	36	108	1300
Total N=	100	CA	1300	

CA=12+150+240+238+266+286+108=1300

La moitié du chiffre d'affaires total est :

$$\frac{1300}{2} = 650$$

Identification de la classe médiale Ml

- ✓ On cumule les chiffres d'affaires jusqu'à atteindre 650
- ✓ La valeur 650 se situe dans la classe [16,22[.
- ✓ En utilisant la formule de la médiale on aura la valeur suivante :

$$M_l = 16 + \frac{650 - 640}{266} \times 6$$

$$M_l = 16 + \frac{10}{266} \times 6$$

$$M_l = 16 + \frac{60}{266}$$

$$M_l = 16 + 0.23$$

$$M_l \approx 16.23$$

Interprétation :

La médiale Ml est **16.23 × 10^3 MAD**, ce qui signifie que **la moitié du chiffre d'affaires du magasin provient des articles vendus à un prix inférieur à 16.23×10^3 MAD**.

Cela indique que les articles les plus chers, bien qu'ils soient moins nombreux, ont un impact significatif sur le chiffre d'affaires total.

4. **Calcul de l'indice de concentration :**

L'indice de concentration est donnée par la formule :

$$IC = \frac{Ml - Mé}{e}$$

Avec Ml la médiale, Mé la médiane et e l'étendue ;

Calcul de la médiane :

La **médiane** est la valeur qui partage la population en deux parties égales.

Ici, l'effectif total N=100, donc la médiane correspond à la **50ème valeur**.

Regardons la **colonne des effectifs cumulés croissants (Nicc)**

Prix	Le nombre d'article (ni)	Nicc
[0,4[	6	6
[4 ,8[	25	31
[8,12[	24	55
[12,16[	17	72
[16,22[	14	86
[22,30[	11	97
[30,42[	3	100
Total N=	**100**	

La 50ème valeur se trouve **dans la classe [8,12[**

$$\text{Médiane} = 8 + \left(\frac{50-31}{24}\right) \times 4 = 8 + \left(\frac{19}{24}\right) \times 4$$

$$\text{Médiane} = 8 + 3.17 \approx \boxed{11.17}$$

Étendue (e)

L'étendue est la différence entre la **borne max** et la **borne min** de la variable (prix).

e= 42 - 0 = 42

Donc

$$IC = \frac{Ml - Mé}{e} = \frac{16.23 - 11.17}{42} = \frac{5.06}{42} \approx \boxed{0.12}$$

L'indice de concentration est de 0.12, ce qui signifie que la concentration est faible.
La masse (le chiffre d'affaires) est assez bien répartie entre les différents niveaux de prix, bien qu'il existe une légère domination de certains prix plus élevés, qui tirent la moyenne vers le haut.